

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Josip Živić

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

Mentor:

Prof. dr. sc. Zdravko Virag, dipl. ing.

Student:

Josip Živić

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći stečena znanja tijekom studija i navedenu literaturu.

Zahvaljujem se obitelji i prijateljima na svesrdnoj podršci tokom studija. Posebno se zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Zdravku Viragu na dugoročnom strpljenju i nesebičnoj pomoći pri izradi ovog Završnog rada.

Josip Živić



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
 Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:
 procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje
Datum: 19.09.2016. Prilog
Klasa: 602-04/16-6/3
Ur. broj: 15-1703-16-386

ZAVRŠNI ZADATAK

Student: Josip ŽIVIĆ Mat. br.: 0035190361

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Analiza pulsirajućeg strujanja u krvnim žilama**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Analysis of Pulsatile Flow in Blood Vessels**

Opis zadatka:

Strujanje krvi u krvožilnom strujanju ima pulsirajući karakter, a poznavanje vremenske promjene smičnog naprezanja u takvom strujanju je od velikog interesa. Postoji analitičko rješenje laminarnog pulsirajućeg strujanja u okruglim cijevima, izvedeno uz pretpostavku harmonijskog gradijenta tlaka, osnosimetričnog strujanja, krute stijenke i konstantne viskoznosti krvi. Poznato je da je viskoznost krvi promjenjiva s brzinom deformacije, pa je u ovom radu je potrebno usporediti analitičko rješenje dobiveno uz pretpostavku konstantne viskoznosti (Womersleyevo rješenje) i numeričko rješenje dobiveno uz promjenjivu viskoznost. Usporedbom obuhvatiti profile brzine u različitim vremenskim trenucima tijekom jednog takta i vremensku promjenu smičnog naprezanja na stijenci krvne žile za različite vrijednosti Womersleyeva broja (bezdimenzijske značajke koja karakterizira ovo strujanje).

Rezultate prikazati grafički i tablično.

Navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatok zadat:

25. studenog 2015.

Zadatok zadat:

Rok predaje rada:

1. rok: 25. veljače 2016.

2. rok (izvanredni): 20. lipnja 2016.

3. rok: 17. rujna 2016.

Predviđeni datumi obrane:

1. rok: 29.2., 02. i 03.03. 2016.

2. rok (izvanredni): 30. 06. 2016.

3. rok: 19., 20. i 21. 09. 2016.

Predsjednik Povjerenstva:

Zdravko Virag
 Prof. dr.sc. Zdravko Virag

Igor Balen
 Prof. dr. sc. Igor Balen

SADRŽAJ

SADRŽAJ	III
POPIS SLIKA	IV
POPIS TABLICA.....	V
POPIS OZNAKA	VII
SAŽETAK.....	VIII
SUMMARY	IX
1. UVOD.....	1
2. TEORIJSKE OSNOVE	2
2.1. Numeričke osnove.....	3
2.1.1. Model konstantnog koeficijenta viskoznosti.....	3
2.1.2. Cassonov model viskoznosti.....	4
2.2. Analitičke osnove.....	5
3. OPIS PROGRAMA	7
3.1. Numerički dio	7
3.1.1. Model konstantne viskoznosti:.....	7
3.1.2. Cassonov model viskoznosti:.....	8
3.2. Analitički dio.....	8
4. DOBIVENA RJEŠENJA.....	9
4.1. Usporedba rješenja za model konstantne viskoznosti μ_∞	9
4.1.1. Usporedba Numeričkog i Analitičkog rješenja za $Wo=1$	9
4.1.1.1. Numerički dobivene veličine:	9
4.1.1.2. Analitički dobivene veličine:	13
4.1.1.3. Razlika dobivenih veličina:.....	16
4.1.2. Usporedba Numeričkog i Analitičkog rješenja za $Wo=3$	18
4.1.3. Usporedba Numeričkog i Analitičkog rješenja za $Wo=10$	22
4.2. Usporedba rješenja za Cassonov model.....	26
4.2.1. Usporedba rješenja za $Wo=1$, Cassonov omjer=0.3	26
4.2.2. Usporedba rješenja za $Wo=3$, Cassonov omjer=0.3	31
4.2.3. Usporedba rješenja za $Wo=10$, Cassonov omjer=0.3	35
5. ANALIZA.....	40
6. ZAKLJUČAK.....	46
LITERATURA.....	47
PRILOZI.....	48

POPIS SLIKA

Slika 1.	Polje numeričke brzine tokom svih taktova.....	9
Slika 2.	Svi profili brzine	10
Slika 3.	20 profila u brzine, $Wo=1$	10
Slika 4.	Derivacija brzine po radijusu	11
Slika 5.	Smično naprezanje, $Wo=1$	12
Slika 6.	Protok, $Wo=1$	12
Slika 7.	Polje w brzine.....	13
Slika 8.	20 profila w brzine	14
Slika 9.	Smično naprezanje, $Wo=1$	15
Slika 10.	Protok, $Wo=1$	15
Slika 11.	Razlika 20 profila brzina, $Wo=1$	16
Slika 12.	Razlika smičnih naprezanja, $Wo=1$	17
Slika 13.	Razlika protoka, $Wo=1$	17
Slika 14.	20 profila brzina u,w, $Wo=3$	18
Slika 15.	Smično naprezanje, $Wo=3$	20
Slika 16.	Protok, $Wo=3$	21
Slika 17.	Numeričko naprezanje i protok, $Wo=3$	22
Slika 18.	20 profila u,w brzina, $Wo=10$	22
Slika 19.	Smično naprezanje, $Wo=10$	24
Slika 20.	Protok, $Wo=10$	25
Slika 21.	Protok i smično naprezanje, $Wo=10$	26
Slika 22.	20 profila brzina	27
Slika 23.	Smično naprezanje, $Wo=1$, $OMJER=0,3$	28
Slika 24.	Protok, $Wo=1$, $OMJER=0,3$	29
Slika 25.	Protok i smično naprezanje, $Wo=1$, $OMJER=0,3$	30
Slika 26.	20 profila brzina , $Wo=3$, $OMJER=3$	31
Slika 27.	Smična naprezanja, $Wo=3$, $OMJER=0,3$	33
Slika 28.	Protok, $Wo=3$, $OMJER=0,3$	34
Slika 29.	Protok i smično naprezanje, $Wo=3$, $OMJER=0,3$	35
Slika 30.	20 profila brzina, $Wo=10$, $OMJER=0,3$	36
Slika 31.	Smična naprezanja, $Wo=10$, $OMJER=0,3$	37
Slika 32.	Protok, $Wo=10$, $OMJER=0,3$	38
Slika 33.	Protok i Smično naprezanje, $Wo=10$, $OMJER=0,3$	39
Slika 34.	Ovisnost brzine o Wo , za $OMJER=0,3$ u tt	40
Slika 35.	Ovisnost brzine o $OMJER-u$, za $Wo=3$	41
Slika 36.	Ovisnost naprezanja o Wo , za $OMJER=0,3$	41
Slika 37.	Ovisnost naprezanja o $OMJER-u$, za $Wo=3$	42
Slika 38.	Ovisnost protoka o Wo , za $OMJER=0,3$	43
Slika 39.	Ovisnost protoka o $OMJER-u$, za $Wo=0,3$	43
Slika 38.	Promjena naprezanja i protoka za $Wo=3$, $OMJER=0,3$	45
Slika 39.	Detalj dijagrama, slika 40.	45

POPIS TABLICA

Tablica 4.1	$u(\text{rad}, \text{tren}), W_o=1$	11
Tablica 4.2	$\text{TauNum}(\text{tren}), W_o=1$	12
Tablica 4.3	$Q\text{Num}(\text{tren}), W_o=1$	13
Tablica 4.4	$w(\text{rad}, \text{tren}), W_o=1$	14
Tablica 4.5	$\text{TauAn}(\text{tren}), W_o=1$	15
Tablica 4.6	$Q\text{An}(\text{tren}), W_o=1$	16
Tablica 4.7.	$u(\text{tren}, \text{rad}) - w(\text{tren}, \text{rad})$	16
Tablica 4.8	$\text{TauNum}(\text{tren}), W_o=1$	17
Tablica 4.9	$Q\text{Num}(\text{tren}) - Q\text{An}(\text{tren}), W_o=1$	18
Tablica 4.10	$w(\text{rad}, \text{tren}), W_o=3$	19
Tablica 4.11	$u(\text{rad}, \text{tren}), W_o=3$	19
Tablica 4.12	$u(\text{rad}, \text{tren}) - w(\text{rad}, \text{tren}), W_o=3$	19
Tablica 4.13	$\text{TauAn}(\text{tren}), W_o=3$	20
Tablica 4.14	$\text{TauNum}(\text{tren}), W_o=3$	20
Tablica 4.15	$\text{TauNum}(\text{tren}) - \text{TauAn}(\text{tren}), W_o=3$	20
Tablica 4.16	$Q\text{An}(\text{tren}), W_o=3$	21
Tablica 4.17	$Q\text{Num}(\text{tren}), W_o=3$	21
Tablica 4.18	$Q\text{Num}(\text{tren}) - Q\text{An}(\text{tren}), W_o=3$	21
Tablica 4.19	$w(\text{rad}, \text{tren}), W_o=10$	23
Tablica 4.20	$u(\text{rad}, \text{tren}), W_o=10$	23
Tablica 4.21	$u(\text{rad}, \text{tren}) - w(\text{rad}, \text{tren}), W_o=10$	23
Tablica 4.22	$\text{TauAn}(\text{tren}), W_o=10$	24
Tablica 4.23	$\text{TauNum}(\text{tren}), W_o=10$	24
Tablica 4.24	$\text{TauNum}(\text{tren}) - \text{TauAn}(\text{tren}), W_o=10$	24
Tablica 4.25	$Q\text{An}(\text{tren}), W_o=10$	25
Tablica 4.26	$Q\text{Num}(\text{tren}), W_o=10$	25
Tablica 4.27	$Q\text{Num}(\text{tren}) - Q\text{An}(\text{tren})$:, $W_o=10$	25
Tablica 4.28	$v(\text{rad}, \text{tren}), W_o=1, \text{OMJER}=0.3$	27
Tablica 4.29	$u(\text{rad}, \text{tren}) - v(\text{rad}, \text{tren}), W_o=1, \text{OMJER}=0.3$	28
Tablica 4.30	$\text{TauCass}(\text{tren}), W_o=1, \text{OMJER}=0.3$	29
Tablica 4.31	$\text{TauNum}(\text{tren}) - \text{TauCass}(\text{tren}), W_o=1, \text{OMJER}=0.3$	29
Tablica 4.32	$Q\text{Cass}(\text{tren}), W_o=1, \text{OMJER}=0.3$	30
Tablica 4.33	$Q\text{Num}(\text{tren}) - Q\text{Cass}(\text{tren}), W_o=1, \text{OMJER}=0.3$	30
Tablica 4.34	$v(\text{rad}, \text{tren}), W_o=3, \text{OMJER}=0.3$	32
Tablica 4.35	$u(\text{rad}, \text{tren}) - v(\text{rad}, \text{tren}), W_o=3, \text{OMJER}=0.3$	32
Tablica 4.36	$\text{TauCass}(\text{tren}), W_o=3, \text{OMJER}=0.3$	33
Tablica 4.37	$\text{TauNum}(\text{tren}) - \text{TauCass}(\text{tren}), W_o=3, \text{OMJER}=0.3$	33
Tablica 4.38	$\text{TauCass}(\text{tren}), W_o=3, \text{OMJER}=0.3$	34
Tablica 4.39	$Q\text{Num}(\text{tren}) - Q\text{Cass}(\text{tren}), W_o=3, \text{OMJER}=0.3$	34
Tablica 4.40	$v(\text{rad}, \text{tren}), W_o=10, \text{OMJER}=0.3$	36
Tablica 4.41	$u(\text{rad}, \text{tren}) - v(\text{rad}, \text{tren}), W_o=10, \text{OMJER}=0.3$	37
Tablica 4.42	$\text{TauCass}(\text{tren}), W_o=10, \text{OMJER}=0.3$	38
Tablica 4.43	$\text{TauNum}(\text{tren}) - \text{TauCass}(\text{tren}), W_o=10, \text{OMJER}=0.3$	38
Tablica 4.44	$\text{TauCass}(\text{tren}), W_o=10, \text{OMJER}=0.3$	39
Tablica 4.45	$\text{TauNum}(\text{tren}) - \text{TauCass}(\text{tren}), W_o=10, \text{OMJER}=0.3$	39

Tablica 5.1.	Maksimalno naprezanje.....	42
Tablica 5.2	Maksimalni protok	44
Tablica 5.3	Fazni pomak između naprezanja i <i>d_pd_z</i>	44

POPIS OZNAKA

DIMENZIJSKE:

ρ	$[\text{kg/m}^3]$	gustoća krvi
r	$[\text{m}]$	radijalna koordinata
t	$[\text{s}]$	vrijeme
u	$[\text{m/s}]$	numerička brzina strujanja
μ_∞	$[\text{Pa} \cdot \text{s}]$	koef. dinamičke viskoznosti
S	$[\text{Pa/m}]$	amplituda gradijenta tlaka
p	$[\text{N/m}^2]$	tlak
x	$[\text{m}]$	aksijalna koordinata
τ	$[\text{N/m}^2]$	smično naprezanje
τ_w	$[\text{N/m}^2]$	smično naprezanje na stijenci
Q	$[\text{m}^3/\text{s}]$	protok

BEZDIMENZIJSKE:

Wo	$[1]$	Womerslyjev broj
\tilde{u}	$[1]$	numerička brzina strujanja
\tilde{w}	$[1]$	analitička brzina strujanja
\tilde{v}	$[1]$	Cassonova brzina strujanja
$\tilde{\tau}$	$[1]$	smično naprezanje
\tilde{Q}	$[1]$	protok
\tilde{r}	$[1]$	radijalna koordinata

SAŽETAK

Cilj zadatka „Analiza pulsirajućeg strujanja viskoznog fluida u krvnim žilama“ je usporediti analitički i numerički model te pokazati da se dobivaju jednoznačna rješenja. Numerički model može se prikazati kao varijanta s konstantnim koeficijentom trenja te kao Cassonov model trenja. Koristeći modificirane jednačbe Navier-Stokesovog strujanja, zadano je strujanje prikazano je kao nestlačivo s harmonijskim gradijentom tlaka u cilindričnom koordinatnom sustavu. Radi lakšeg uspoređivanja numeričkog i analitičkog modela jednačbe su u bezdimenzijskom obliku. Kao promjenjive ulazne veličine korišten je samo bezdimenzijski Womerslyjev broj te OMJER kod Cassonovog modela. Brzina, smično naprezanje i protok u funkciji prostorne i vremenske koordinate računate su kao izlazne varijable.

Ključne riječi:

Pulsirajuće strujanje; nestlačivo strujanje; harmonijski gradijent tlaka; Womerslyjev broj

SUMMARY

The aim of assignment "Analysis of Pulsatile Flow in Blood Vessels" is to compare analytical and numerical model and to show that both result are identical. Numerical model can be shown as a variant with a constant coefficient of friction and also as Casson model of friction. Using modified equations of Navier-Stokes flow, given flow is presented as incompressible with harmonic gradient of pressure in cylindrical coordinate system. Due to easier comparison of numerical and analytical model, the equations are in dimensionless form. As variable inputs are used only dimensionless Womersly number and RATIO with Cassan model. Speed, shear stress and flow in function of spatial and temporal coordinate are beeing calculated as variable outputs.

Key words:

Pulsated flow; incompressible flow; harmoical gradient of preassure; Womersly number

1. UVOD

Strujanje u krvnim žilama izrazito je pulsirajućeg karaktera zbog načina rada srca. Same krvne žile možemo promatrati kao elastične odnosno viskoelastične cijevi različitih promjera te fizikalnih svojstava stjenki. Sve navedeno čini nemogućim nalaženje analitičkog rješenja. Za slučaj arterija koje su neelastične, postoji analitičko rješenje koje je još 1955. godine izveo britanski matematičar John Roland Womersly. Womersly je gradijent tlaka uzeo kao harmonijsku sinusoidnu funkciju. Ono što u ovom modelu nije potpuno ispravno je to da je pretpostavljena beskonačno velika brzina širenja tlačnih poremećaja, odnosno uvedena je teorija krutog stupca. Unatoč tome, model može objasniti prirodu pulsirajućeg strujanja i pulsacije smičnog naprezanja na stijenci cijevi, pri čemu se pretpostavka o konačnoj brzini širenja tlačnih poremećaja može naknadno uvesti u analizu.

Uvođenjem pojednostavljenog modela izvršili smo linearizaciju početnog modela te stvorili uvjete za korištenje superpozicije. Tako pomoću Womerslyjevog rješenja možemo razmatrati i realni vremenski protok brzine i tlaka uz predočavanje preko Fourieovog reda uz naknadno analiziranje svake frekvencije zasebno.

U literaturi za Womerslyjevo rješenje korištena je sinusna promjena gradijenta tlaka a za Fourieovo rješenje sinusna i kosinusna komponenta. Cilj ovog rada je izvesti analitičko Womerslyjevo rješenje i numeričko rješenje te ih usporediti. Naknadno će u numeričkom dijelu biti dodan Cassonov model trenja. U tom slučaju koeficijent trenja nije konstantan nego se mijenja u ovisnosti o smičnom naprezanju. U poglavlju „Teorijske osnove“ bit će prikazane polazne jednadžbe, njihov opis te objašnjene korištenih veličina. U poglavlju „Opis korištenog programa“ bit će opisan kôd korišten za rješavanje zajedno s objašnjenjem pojedinih načina rješavanja. Poglavlje „Dobivena rješenja“ daje uvid u izlazne varijable te njihovu analizu.

2. TEORIJSKE OSNOVE

Glavna polazna jednačba koja se ovdje prikazuje zapravo je reducirana Navier-Stokesova jednačba za aksijalnu brzinu u cilindarskim koordinatama. Nakon izjednačavanja nekorištenih članova s nulom, jednačba ima oblik:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{dp}{dx} \quad (2.1)$$

To je zapravo matematički izražen model strujanja nestlačivog fluida u cijevi krvne žile gdje djeluje harmonijski gradijent tlaka. Kada istu jednačbu zapišemo u cilindričnom obliku, dobivamo drugi zapis iste jednačbe:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{dp}{dx} \quad (2.2)$$

Gradijent tlaka po osi x izražen je kao:

$$\frac{dp}{dx} = S \sin(\omega t) \quad (2.3)$$

Smično naprezanje računa se po formuli:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.4)$$

Smično naprezanje na stijenci se zapisuje:

$$\tau_w = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} \quad (2.4)$$

Protok po presjeku cijevi računa se po formuli:

$$Q(t) = 2\pi \int_r u(t, r) r dr \quad (2.5)$$

U gornjim jednađbama su: r , x – radijalna i aksijalna koordinata cilindarskog koordinatnog sustava, t – vremenska koordinata, $p(x, t)$ – polje tlaka, S – amplituda gradijenta tlaka, ρ – gustoća fluida, $u(r, t)$ – aksijalna brzina, $\tau(u)$ – tangencijalno naprezanje, $Q(t)$ – protok i μ – viskoznost fluida. Ovaj model pretpostavlja beskonačnu brzinu širenja tlačnih poremećaja, pa zato aksijalna brzina nije funkcija x koordinate. S druge strane, tlak nije funkcija r koordinate.

2.1. Numeričke osnove

2.1.1. Model konstantnog koeficijenta viskoznosti

Ukoliko je koeficijent viskoznosti konstantan, može se pisati da je $\mu = \mu_\infty$. Zapis jednađbe (2.2) s konstantnim koeficijentom trenja glasi:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu_\infty \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{dp}{dx} \quad (2.6)$$

Radi lakšeg računanja uvode se bezdimenzijske veličine:

$$\tilde{t} = \omega t \quad (2.7) \quad \text{slijedi:} \quad t = \frac{\tilde{t}}{\omega} \quad (2.11)$$

$$\tilde{u} = \frac{4\mu}{R^2 S} u \quad (2.8) \quad \text{slijedi:} \quad u = \frac{R^2 S}{4\mu} \tilde{u} \quad (2.12)$$

$$\tilde{r} = \frac{r}{R} \quad (2.9) \quad \text{slijedi:} \quad r = \tilde{r} R \quad (2.13)$$

$$\tilde{\tau}_w = \frac{4}{SR} \tau_w \quad (2.10) \quad \text{slijedi:} \quad \tau_w = \frac{SR}{4} \tilde{\tau}_w \quad (2.14)$$

Kada se jednađba (1.6) napiše u bezdimenzijskom obliku dobiva se:

$$\rho \frac{SR^2}{4\mu} \omega \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{R^2} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \left(R \tilde{r} \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \frac{SR^2}{4\mu R} \right) + S \sin(\tilde{t}) \quad (2.15)$$

Odnosno:

$$\frac{1}{4} \text{Wo}^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \left(\tilde{r} \frac{1}{4} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) + \sin(\tilde{t}) \quad (2.16)$$

Gdje je $\text{Wo} = R \sqrt{\frac{\omega \rho}{\mu}}$ bezdimenzijski Womerslyjev broj koji je omjer inercijskih i viskoznih sila.

te će se dalje koristiti u ovom bezdimenzijskom obliku.

2.1.2. Cassonov model viskoznosti

Isto kao što je u poglavlju 2.1.1. pokazan, model strujanja nestlačivog fluida i za Cassonov model u cijevi krvne žile gdje djeluje harmonijski gradijent tlaka se zapisuje prema jednadžbi (2.2)

Gradijent tlaka isti je kao u prethodnom slučaju prema (2.3):

Međutim, u ovom slučaju viskoznost nije konstantna nego je funkcija smičnog naprezanja.

Zbog toga se mijenja i izraz za smično naprezanje koje se sada računa po zapisu:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = \mu_{\infty} \frac{\partial u}{\partial r} + \tau_0 + 2 \sqrt{\mu_{\infty} \tau_0} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.17)$$

Bezdimenzijski zapis glasi:

$$\tilde{\tau} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \tilde{\tau}_0 + 2 \sqrt{\tilde{\tau}_0} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \quad (2.18)$$

Te se sada može uvesti:

$$\tilde{\tau}_0 = \text{OMJER} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \quad (2.19)$$

Gdje je će dalje OMJER biti korišten kao:

$$\text{OMJER} = \frac{\tilde{\tau}_0}{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}}} \quad (2.20)$$

Gore navedene veličine predstavljaju:

τ_0 -početna vrijednost tangencijalnog naprezanje, μ_∞ – početni koeficijent viskoznosti.

2.2. Analitičke osnove

Jednadžbu (2) bit će analizirana u frekvencijskoj domeni, pri čemu će se gradijent tlaka prikazati pomoću kompleksne amplitude (fazora): $\hat{P} = S + iC$, gdje je $i = \sqrt{-1}$. U tom slučaju izraz gradijenta tlaka se može prikazati realnim dijelom izraza:

$$\frac{dp}{dx} = \text{Re} \left\{ -i \hat{P} e^{i\omega t} \right\} \quad (2.21)$$

Rješenje za aksijalnu brzinu ćemo pretpostaviti u obliku [1]:

$$w(r, t) = \text{Re} \left\{ \hat{U}(r) e^{i\omega t} \right\} \quad (2.22)$$

Uvrštavanjem izraza (3) i (4) u jednadžbu (2) slijedi diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\partial^2 \hat{W}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{W}}{\partial r} - \frac{i\rho\omega}{\mu} \hat{U} = -\frac{i\hat{P}}{\mu}, \quad (2.23)$$

čiji homogeni dio označuje Besselovu jednadžbu. Rješenje jednadžbe (6) je oblika:

$$\hat{W} = \frac{\hat{P}}{\rho\omega} + CJ_0 \left(r \sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}} e^{\frac{3\pi i}{4}} \right), \quad (2.24)$$

Gdje je C konstanta integracije, $J_0(z)$ označuje Besselovu funkciju prve vrste, nultog reda, a z je kompleksni broj. Uvođenjem bezdimenzijskog Womerslyjevog broja Wo , bezdimenzijskog radijusa y , brzine w_0 , te parametra Λ prema izrazima:

$$Wo = R \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}}, \quad y = \frac{r}{R}, \quad w_0 = |\hat{P}| \frac{R^2}{4\mu} \quad \text{ i } \quad \Lambda = Wo e^{\frac{3\pi}{4}i}, \quad (2.25)$$

Primjenom rubnih uvjeta dobije se konačno rješenje za bezdimenzijsku aksijalnu brzinu koje glasi:

$$\tilde{w} = \frac{w}{w_0} = \text{Re} \left\{ \frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{4}{Wo^2} \left[1 - \frac{J_0(\Lambda y)}{J_0(\Lambda)} \right] e^{i\omega t} \right\} \quad (2.26)$$

Bezdimenzijski protok fluida kroz poprečni presjek cijevi $Q = \int_0^R 2\pi u r dr$, definiran je izrazom:

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{w_0 R^2 \pi} = \text{Re} \left\{ \frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{8i}{Wo^4} \left[-\frac{Wo^2 i}{2} - \frac{\Lambda J_1(\Lambda)}{J_0(\Lambda)} \right] e^{i\omega t} \right\}, \quad (2.27)$$

a bezdimenzijsko smično naprezanje na stijenci cijevi $\tau_w = \mu \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R}$ definirano je izrazom:

$$\tilde{\tau}_w = \frac{\tau_w}{w \frac{w_0}{R}} = \text{Re} \left\{ 4 \frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{e^{\frac{3\pi}{4}i} J_1(\Lambda)}{Wo J_0(\Lambda)} e^{i\omega t} \right\} \quad (2.28)$$

U izrazima (2.25), (2.27), (2.28) $J_1(z)$ označuje Besselovu funkciju prve vrste, prvog reda, koju se može jednostavno izračunati u programskom paketu Matlab, ili s pomoću algoritama danih u [4]. Za izračun vrijednosti brzine, protoka i smičnih naprezanja u ovom se radu koristi programski paket Matlab.

3. OPIS PROGRAMA

Kao što je već rečeno, riješeno je više matematičkih modela: model s konstantnim koeficijentom trenja te Cassonovim modelom trenja. Zbog nemogućnosti Matlaba da u svome direktoriju prikaže prave simbole za grčka slova, korišteni su ekvivalentni nazivi:

$$\tau_n = \text{TauNum}$$

$$\tau_a = \text{TauAn}$$

$$\tau_c = \text{TauCass}$$

$$Q_n = Q\text{Num}$$

$$Q_a = Q\text{An}$$

$$Q_c = Q\text{Cass}$$

U programu su dobivene matrice rješenja brzine, dimenzija 100x100 a rješenja protoka i naprezanja su matrice 1x100. Kako bi analiza rješenja bila moguća i da bi pregled rješenja bio jasniji, uvedeni su vektori rad = [10,20,30,40,50,60,70,80,90,100] i tren = [10,35,60,85]. Sva daljnja rješenja tražit će se u tim točkama. Npr vektori rad i tren u točki brzine u(20,35) iznose upravo 20 i 35. U poglavlju „PRILOG“ nalazi se cjelokupan kod u Matlabu

3.1. Numerički dio

3.1.1. Model konstantne viskoznosti:

Krajnji oblik jednadžbe (2.3) u bezdimenzijskom obliku glasi:

$$\frac{1}{4} \text{Wo}^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{1}{4} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right) + \sin(\omega t) \quad (3.1)$$

Radi mogućnosti usporedbe s analitičkim modelom sve veličine su izračunate u bezdimenzijskom obliku te će se tako dalje i koristiti bez posebnog naglašavanja.

Ova jednačba je u Matlabu riješena koristeći funkciju pdepe. Kratak opis pdepe rješavača u Matlabu glasi:

„pdepe - Solve initial-boundary value problems for parabolic-elliptic PDEs in 1-D

This MATLAB function solves initial-boundary value problems for systems of parabolic and elliptic PDEs in the one space variable x and time t.

`sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan)`

`sol = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan,options)`

`[sol,tsol,sole,te,ie] = pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan,options)“`

3.1.2. Cassonov model viskoznosti:

Za slučaj Cassonovog modela, kôd je isti kao u prijašnjem primjeru uz iznimku što se dodaje „OMJER“ koji više nema vrijednost nula . OMJER je oznaka u Matlabu i odgovara:

$$\text{OMJER} = \frac{\tilde{\tau}_0}{\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} \right)} .$$

3.2. Analitički dio

Krajnji oblik jednačbe koja se rješava isti je kao i kod numeričkog modela. Pri rješavanju korištena je beselova funkcija prvog reda. Ukratko je opisana u Matlabu:

„besselj - Bessel function of first kind

This MATLAB function computes the Bessel function of the first kind, $J_\nu(z)$, for each element of the array Z.

`J = besselj(nu,Z)`

`J = besselj(nu,Z,1)“`

4. DOBIVENA RJEŠENJA

4.1. Usporedba rješenja za model konstantne viskoznosti μ_∞

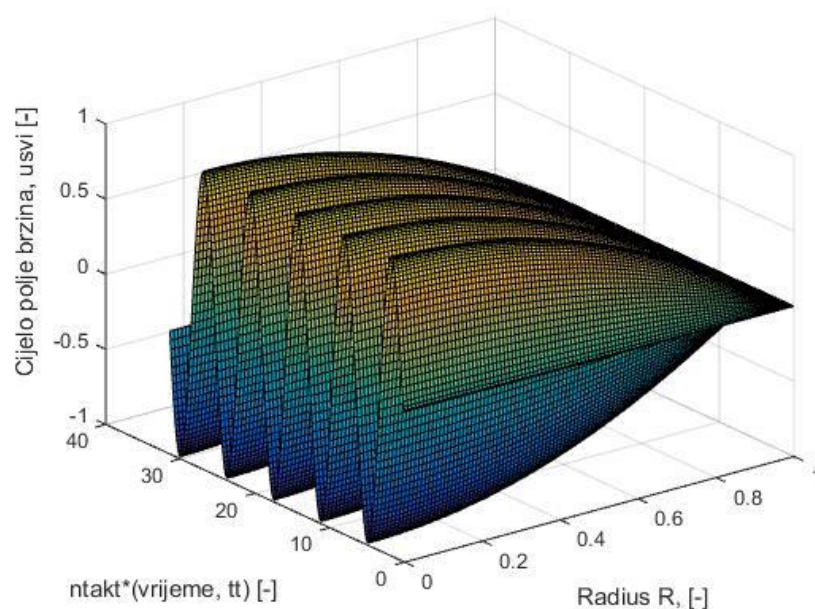
Prvo će biti analizirana rješenja za model konstantnog koeficijenta viskoznosti. Korišten je stalan koeficijent viskoznosti a varirani su Womerslyjevi brojevi.

4.1.1. Usporedba Numeričkog i Analitičkog rješenja za $Wo=1$

Rješavanjem diferencijalne jednačbe u Matlabu numeričkim i analitičkim putem dobivena su polja brzina, naprezanja i protoka. Samo za slučaj $Wo=1$ bit će posebno odnosno pojedinačno crtani grafovi veličina kao i razlika između numeričkih i analitičkih rješenja.

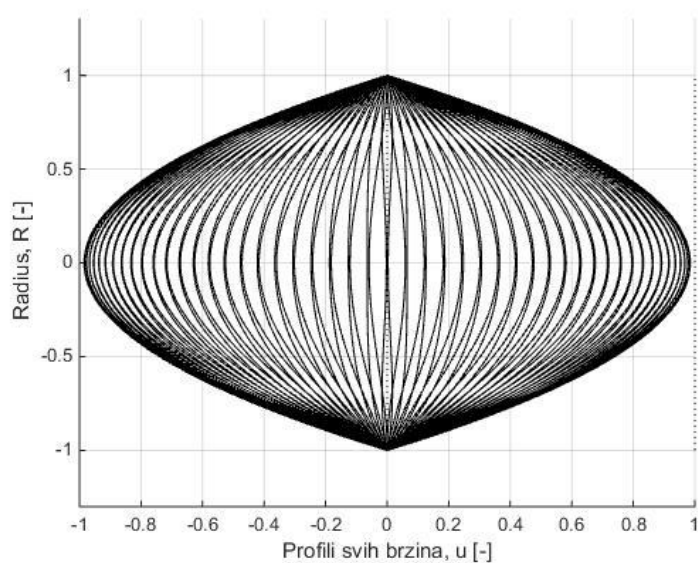
4.1.1.1. Numerički dobivene veličine:

Polje brzine u ovisnosti o vremenu i radijusu tokom 5 taktova koji su simulirani u Matlabu:



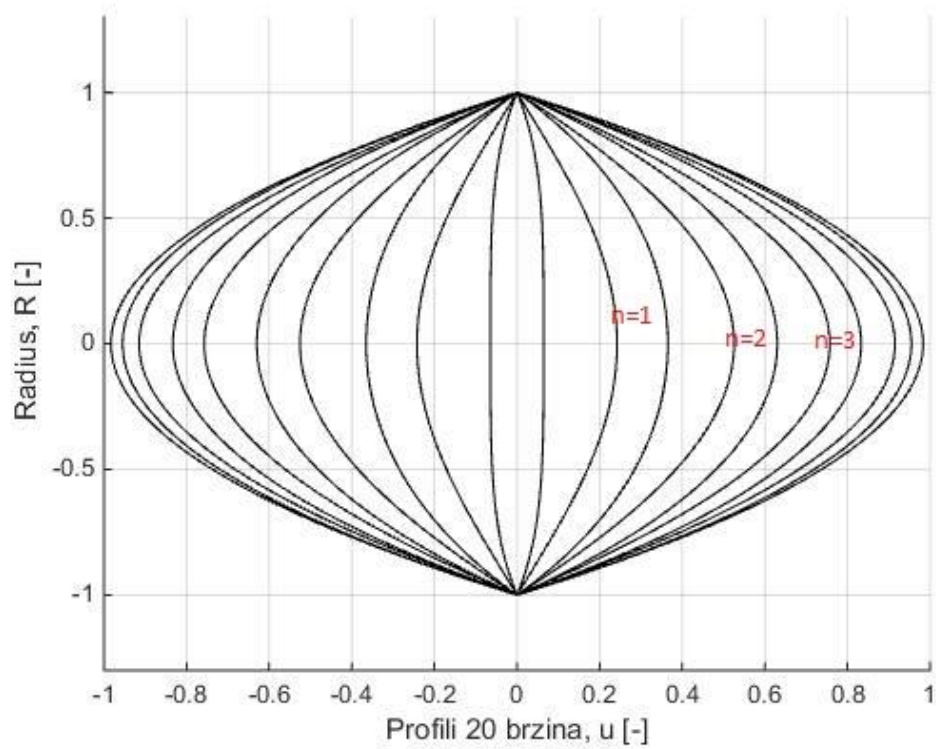
Slika 1. Polje numeričke brzine tokom svih taktova

Profili svih profila u brzina:



Slika 2. Svi profili brzine

Profili 20 profila brzina:



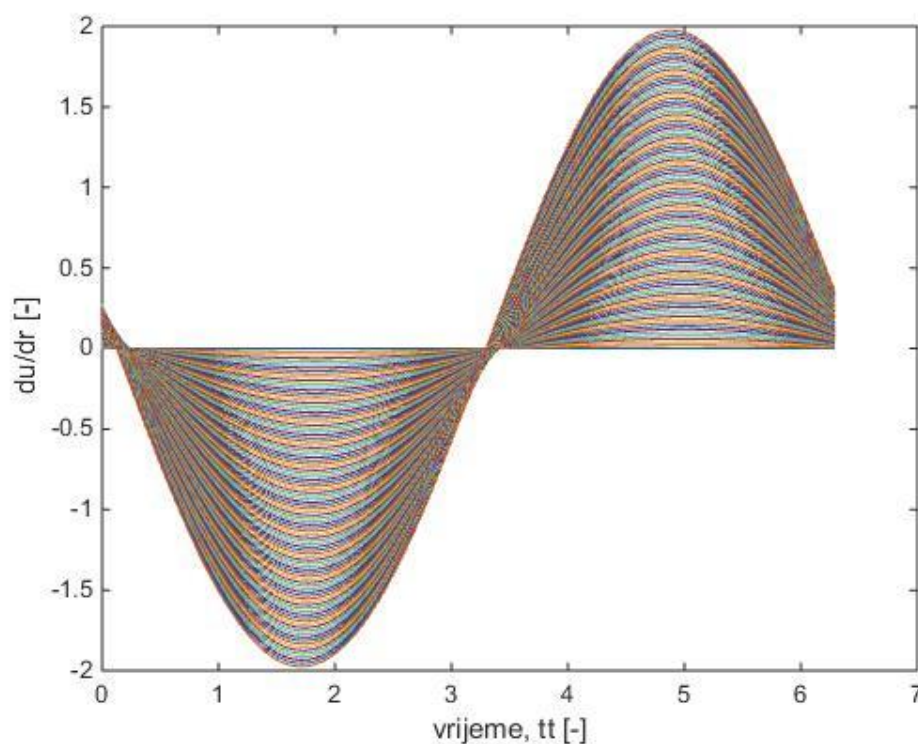
Slika 3. 20 profila u brzine, $Wo=1$

Tablični prikaz brzina u funkciji radiusa i vremena, $u(rad, tren)$

Brzina numerička (rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	0,3626	0,9071	-0,3626	-0,9071
2.	0,3537	0,8804	-0,3537	-0,8804
3.	0,3383	0,8347	-0,3383	-0,8347
4.	0,3160	0,7701	-0,3160	-0,7701
5.	0,2864	0,6868	-0,2864	-0,6868
6.	0,2487	0,5850	-0,2487	-0,5850
7.	0,2021	0,4650	-0,2022	-0,4650
8.	0,1459	0,3272	-0,1459	-0,3272
9.	0,0789	0,1721	-0,0789	-0,1721
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

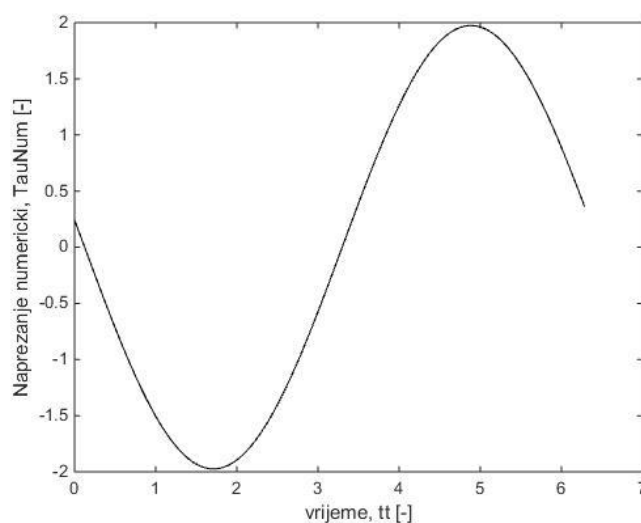
Tablica 4.1 $u(rad,tren)$, $Wo=1$

Graf derivacije brzine u svim radiusima:



Slika 4. Derivacija brzine po radijusu

Graf naprezanja u jednom taktu prikazan je na slici:



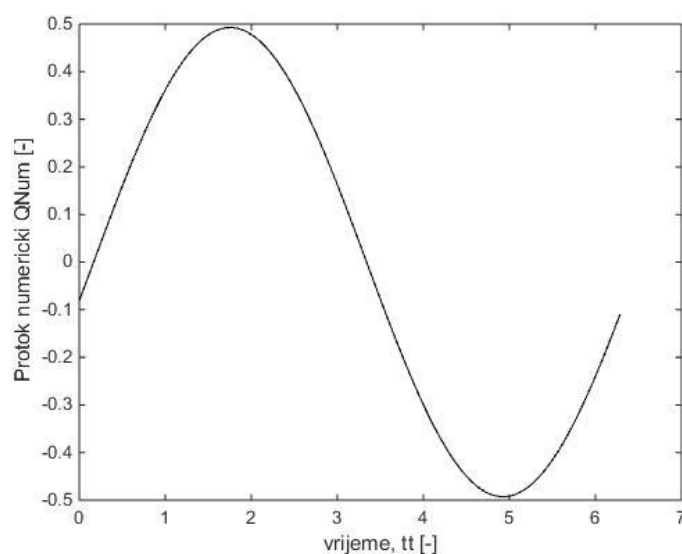
Slika 5. Smično naprezanje, $Wo=1$

Tablični prikaz naprezanja u funkciji vremena, $TauNum(tren)$:

Naprezanje numeričko (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,8448	-1,7848	0,8448	1,7848

Tablica 4.2 $TauNum(tren)$, $Wo=1$

Graf protoka u jednom taktu:



:

Slika 6. Protok, $Wo=1$

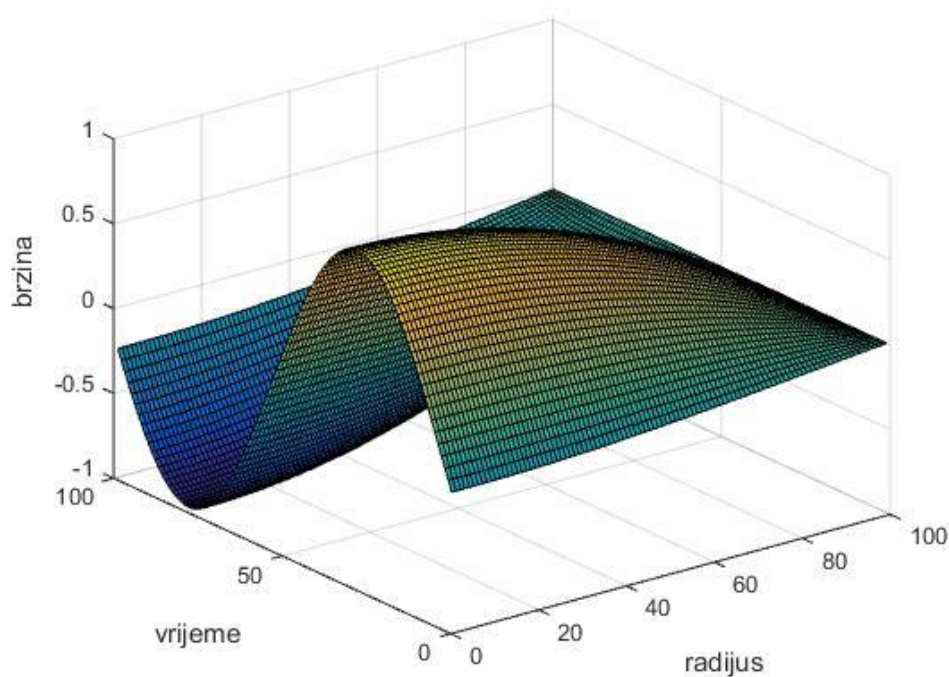
Tablični prikaz protoka u funkciji vremena, $Q_{Num}(tren)$:

Protok numerički (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,1921	0,4538	-0,1921	-0,4538

Tablica 4.3 $Q_{Num}(tren)$, $Wo=1$

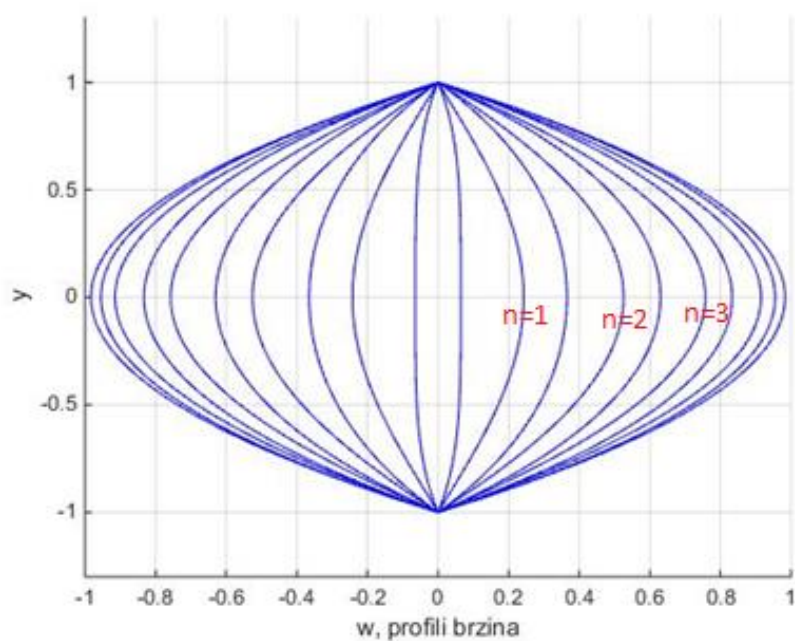
4.1.1.2. Analitički dobivene veličine:

Polje brzine u ovisnosti o vremenu i radijusu:



Slika 7. Polje w brzine

Graf 20 profila brzine:



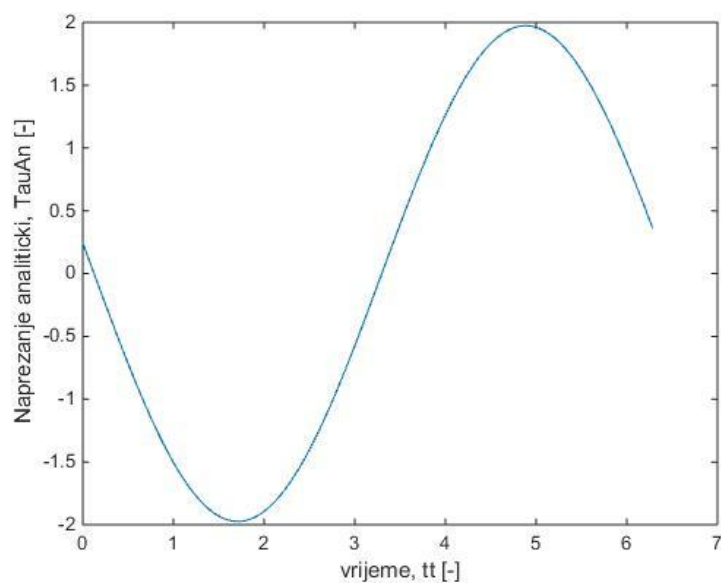
Slika 8. 20 profila w brzine

Tablični prikaz brzina u funkciji tren i rad, $w(rad, tren)$:

Brzina analitička(tren,rad)				
	1.	2.	3.	4.
1.	0,3625	0,9070	-0,3625	-0,9070
2.	0,3537	0,8803	-0,3537	-0,8803
3.	0,3383	0,8346	-0,3383	-0,8346
4.	0,3160	0,7701	-0,3160	-0,7701
5.	0,2863	0,6868	-0,2863	-0,6868
6.	0,2486	0,5850	-0,2486	-0,5850
7.	0,2021	0,4650	-0,2021	-0,4650
8.	0,1459	0,3272	-0,1459	-0,3272
9.	0,0789	0,1720	-0,0789	-0,1720
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 4.4 $w(rad, tren)$, $W_0=1$

Graf naprezanja u jednom taktu:

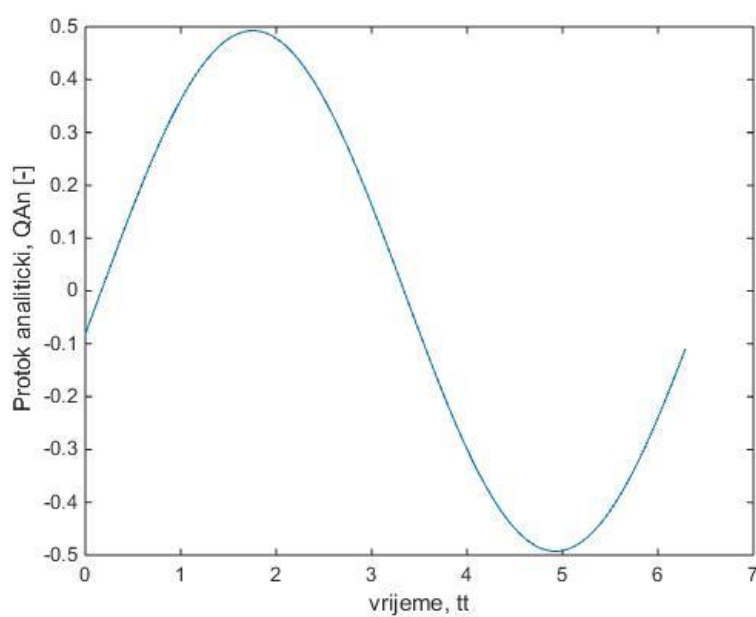
Slika 9. Smično naprezanje, $W_o=1$

Tablični prikaz naprezanja u funkciji vremena, $\tau_{an}(tren)$:

Naprezanje analitičko (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,8447	-1,7847	0,8447	1,7847

Tablica 4.5 $\tau_{an}(tren)$, $W_o=1$

Graf protoka u jednom taktu:

Slika 10. Protok, $W_o=1$

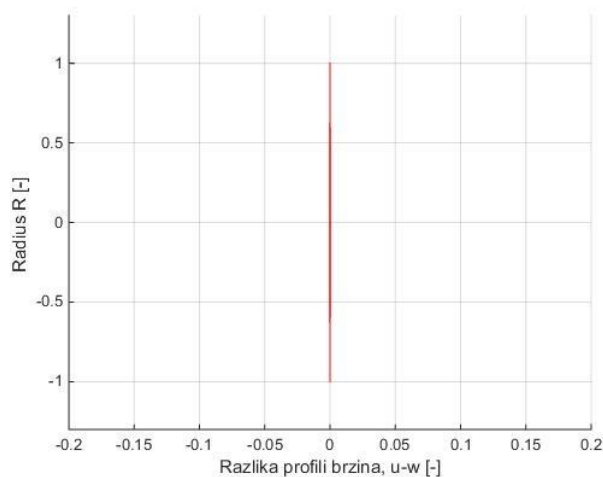
Tablični prikaz protoka u funkciji vremena, $QAn(tren)$:

Protok analitičko (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,1921	0,4538	-0,1921	-0,4538

Tablica 4.6 $QAn(tren)$, $Wo=1$

4.1.1.3. Razlika dobivenih veličina:

Graf razlike 20 profila brzina:



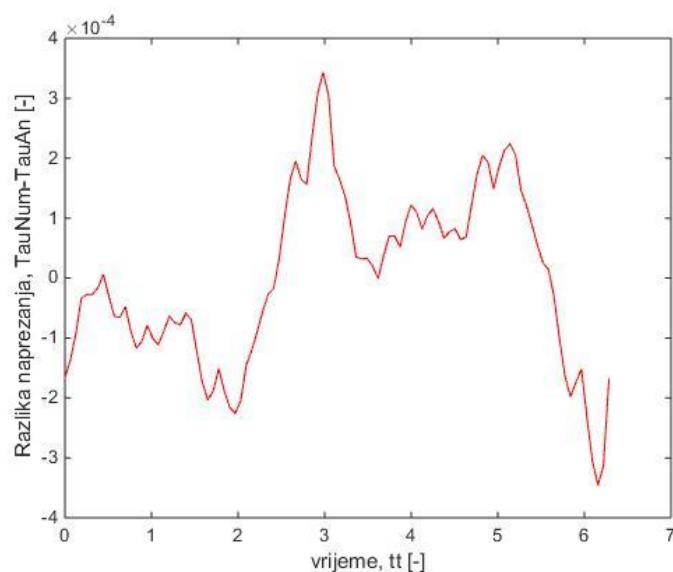
Slika 11. Razlika 20 profila brzina, $Wo=1$

Tablični prikaz razlika brzina u funkciji vremena i radiusa, $u(rad, tren) - w(rad, tren)$

Razlika brzina (tren,rad)				
	1.	2.	3.	4.
1.	6,55E-05	8,34E-05	-6,98E-05	-8,31E-05
2.	6,35E-05	7,98E-05	-6,76E-05	-7,95E-05
3.	5,99E-05	7,39E-05	-6,38E-05	-7,36E-05
4.	5,49E-05	6,59E-05	-5,85E-05	-6,57E-05
5.	4,86E-05	5,62E-05	-5,16E-05	-5,60E-05
6.	4,08E-05	4,53E-05	-4,34E-05	-4,52E-05
7.	3,19E-05	3,37E-05	-3,38E-05	-3,36E-05
8.	2,19E-05	2,19E-05	-2,32E-05	-2,19E-05
9.	1,11E-05	1,05E-05	-1,17E-05	-1,05E-05
10.	0	0	0	0

Tablica 4.7. $u(tren, rad) - w(tren, rad)$

Graf razlike naprezanja u jednom taktu:



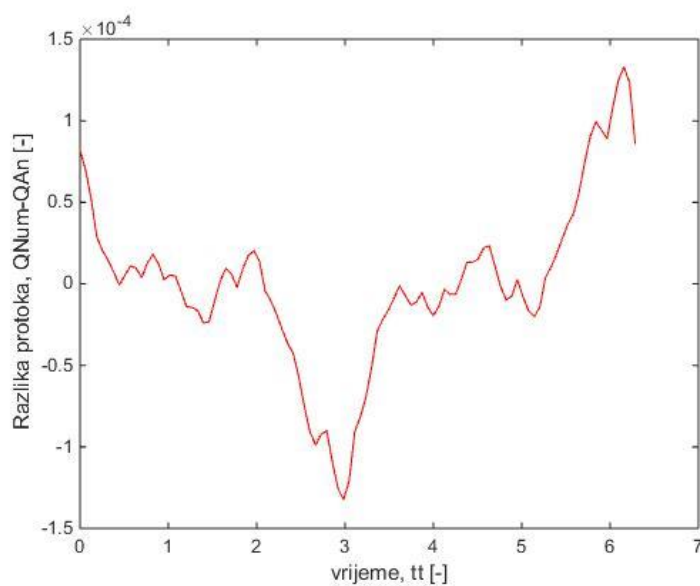
Slika 12. Razlika smičnih naprezanja, $Wo=1$

Tablični prikaz razlike naprezanja u funkciji vremena, $TauNum(tren)-TauAn(tren)$

Naprezanje analitičko (tren)			
1.	2.	3.	4.
-6,4E-05	-1,2E-04	7,0E-05	1,2E-04

Tablica 4.8 $TauNum(tren)$, $Wo=1$

Graf razlike protoka u jednom taktu :



Slika 13. Razlika protoka, $Wo=1$

Tablični prikaz protoka u funkciji vremena, $Q_{Num}(tren)$ - $Q_{An}(tren)$

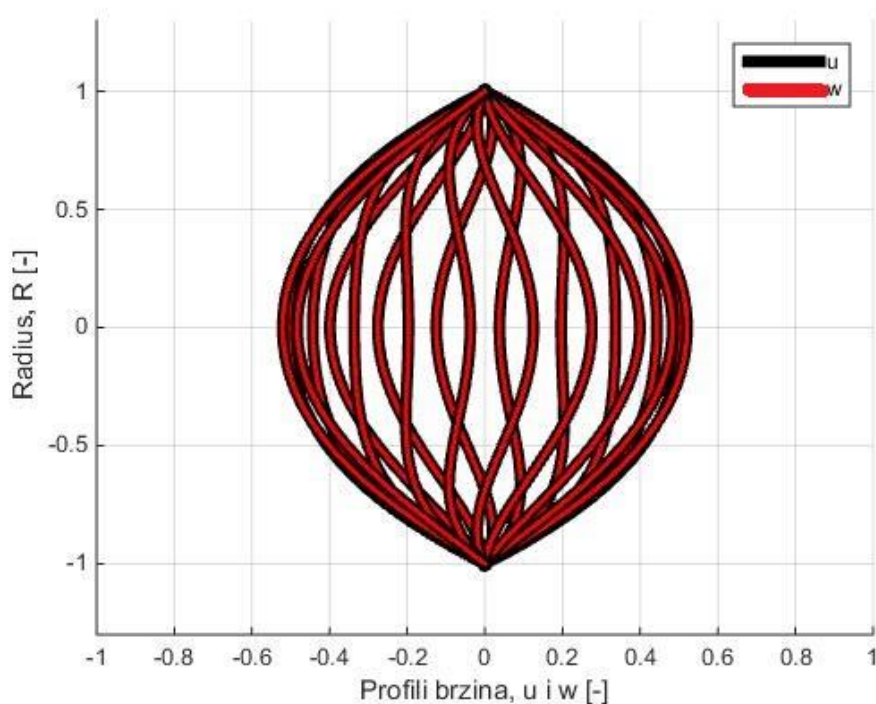
Razlika protoka (tren)			
1.	2.	3.	4.
1,1E-05	-1,0E-05	-1,3E-05	1,0E-05

Tablica 4.9 $Q_{Num}(tren)$ - $Q_{An}(tren)$, $Wo=1$

4.1.2. Usporedba Numeričkog i Analitičkog rješenja za $Wo=3$

Kôd programa kojim su dobivena rješenja polja brzina, smičnih naprezanja i protoka isti je kao u početnom primjeru, izuzev toga što je promijenjena vrijednost Womersyjevog broja s 1 na 3. Ovdje radi pojednostavljenja i preglednosti nisu pojedinačno crtani svi grafovi nego su složeni na isti graf. Isto kao i u prethodnom slučaju brzine, smična naprezanja i protoci su uzeti kao funkcija skraćenog polja nazvanog rad i tren.

Graf 20 profila brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$:



Slika 14. 20 profila brzina u, w , $Wo=3$

Tablični prikaz brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$:

Brzina numerička (rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	-0,2716	0,4415	0,2716	-0,4415
2.	-0,2586	0,4347	0,2586	-0,4347
3.	-0,2368	0,4222	0,2368	-0,4222
4.	-0,2071	0,4024	0,2071	-0,4024
5.	-0,1710	0,3734	0,1710	-0,3734
6.	-0,1304	0,3326	0,1304	-0,3326
7.	-0,0884	0,2774	0,0884	-0,2774
8.	-0,0489	0,2050	0,0489	-0,2050
9.	-0,0172	0,1132	0,0172	-0,1132
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 4.11 $u(rad, tren)$, $Wo=3$

Brzina analitička (rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	-0,2720	0,4413	0,2720	-0,4413
2.	-0,2590	0,4346	0,2590	-0,4346
3.	-0,2372	0,4221	0,2372	-0,4221
4.	-0,2075	0,4023	0,2075	-0,4023
5.	-0,1713	0,3733	0,1713	-0,3733
6.	-0,1306	0,3325	0,1306	-0,3325
7.	-0,0886	0,2773	0,0886	-0,2773
8.	-0,0490	0,2050	0,0490	-0,2050
9.	-0,0172	0,1131	0,0172	-0,1131
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 4.10 $w(rad, tren)$, $Wo=3$

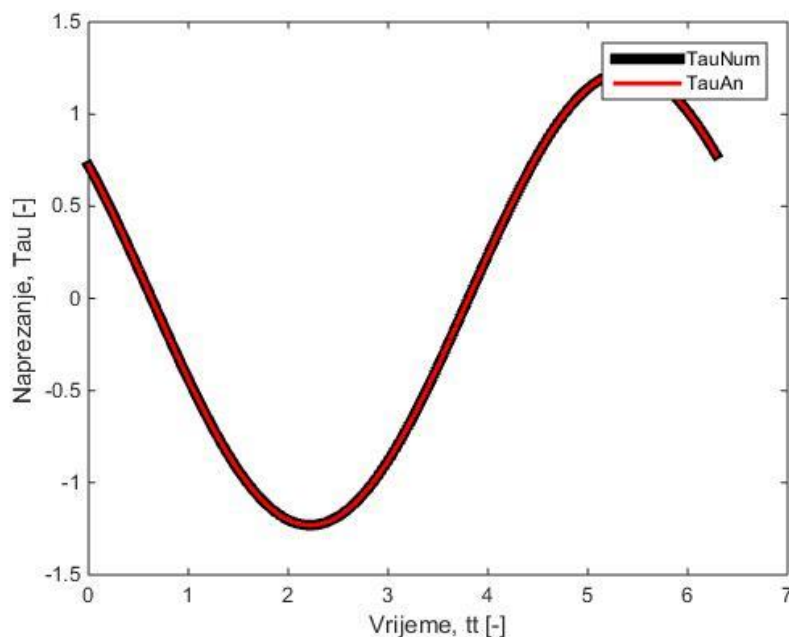
Tablični prikaz razlika brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$

Razlika brzina (rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	3,82E-04	1,45E-04	-3,82E-04	-1,45E-04
2.	3,69E-04	1,38E-04	-3,69E-04	-1,38E-04
3.	3,46E-04	1,26E-04	-3,46E-04	-1,26E-04
4.	3,14E-04	1,09E-04	-3,14E-04	-1,09E-04
5.	2,73E-04	9,05E-05	-2,73E-04	-9,05E-05
6.	2,24E-04	7,05E-05	-2,24E-04	-7,05E-05
7.	1,70E-04	5,06E-05	-1,70E-04	-5,06E-05
8.	1,11E-04	3,21E-05	-1,11E-04	-3,21E-05
9.	5,36E-05	1,53E-05	-5,36E-05	-1,53E-05
10.	0	0	0	0

Tablica 4.12 $u(rad,tren)-w(rad,tren)$, $Wo=3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se brzine gotovo potpuno poklapaju a minimalna razlika mogla bi se okarakterizirati kao greška u načinu računanja računalnog programa. No brzine su u iznosu manje nego kod početnog slučaja za $Wo=1$.

Graf naprezanja u jednom taktu:

Slika 15. Smično naprežanje, $Wo=3$

Tablični prikaz numeričkog i analitičkog naprežanja, $TauNum(tren)$ i $TauAn(tren)$

:

Naprežanje numeričko (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,0729	-1,2286	-0,0729	1,2286

Tablica 4.14 $TauNum(tren)$, $Wo=3$

Naprežanje analitičko (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,0730	-1,2284	-0,0730	1,2284

Tablica 4.13 $TauAn(tren)$, $Wo=3$

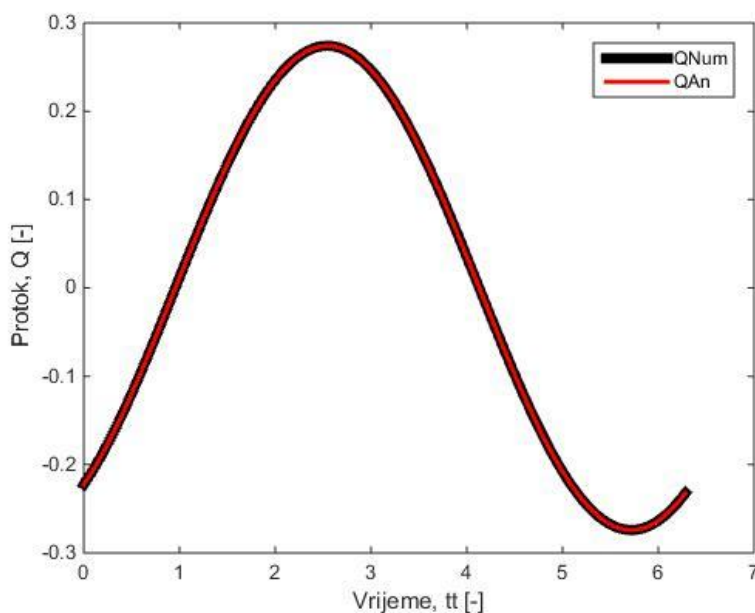
Tablični prikaz razlike numeričkog i analitičkog naprežanja $TauNum(tren) - TauAn(tren)$:

Razlika naprežanja (tren)			
1.	2.	3.	4.
-2,0E-04	-1,5E-04	2,0E-04	1,5E-04

Tablica 4.15 $TauNum(tren)-TauAn(tren)$, $Wo=3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se naprežanja gotovo potpuno poklapaju a minimalna razlika mogla bi se okarakterizirati kao greška u načinu računanja računalnog programa. No, naprežanja su u iznosu manje nego kod početnog slučaja za $Wo=1$.

Graf protoka u jednom taktu:



Slika 16. Protok, $Wo=3$

Tablični prikaz numeričkog i analitičkog protoka, $QNum(tren)$ i $QAn(tren)$:

Protok numerički (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,1021	0,2544	0,1021	-0,2544

Tablica 4.17 $QNum(tren)$, $Wo=3$

Protok analitičko (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,1023	0,2544	0,1023	-0,2544

Tablica 4.16 $QAn(tren)$, $Wo=3$

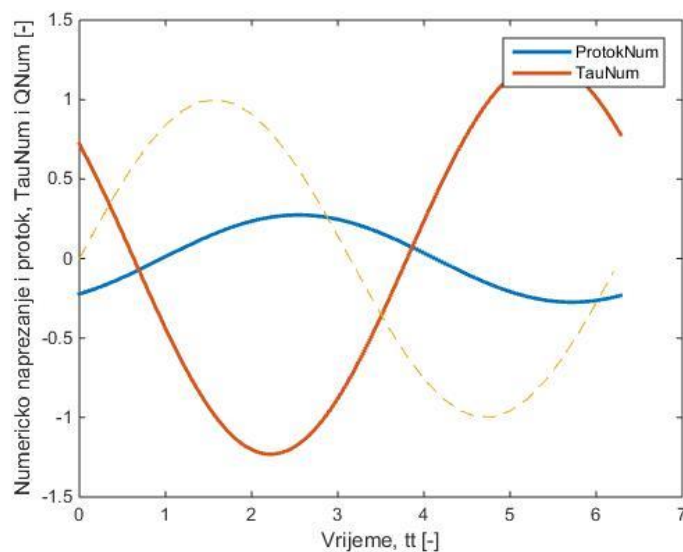
Tablični prikaz razlike numeričkog i analitičkog protoka, $QNum(tren) - QAn(tren)$:

Razlika protoka (tren)			
1.	2.	3.	4.
1,8E-04	2,9E-05	-1,8E-04	-2,9E-05

Tablica 4.18 $QNum(tren)-QAn(tren)$, $Wo=3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se protoci gotovo potpuno poklapaju a minimalna razlika mogla bi se okarakterizirati kao greška u načinu računanja računalnog programa. No, protoci su u iznosu manje nego kod početnog slučaja za $Wo=1$.

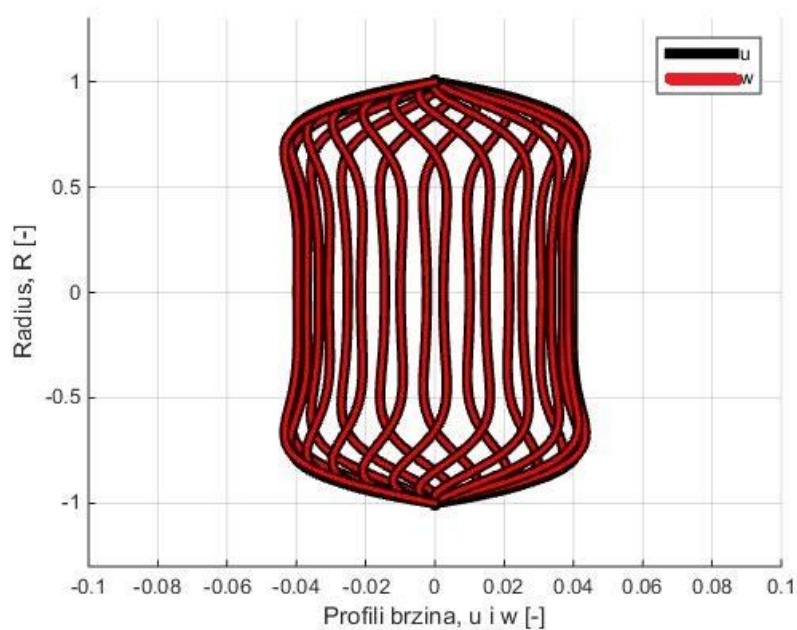
Da bi se vidio fazni pomak uslijed povećanja Womerslyjevog broja na istom grafu nacrtane su funkcije numeričkog protoka i naprezanja.



Slika 17. Numeričko naprezanje i protok, $Wo=3$

4.1.3. Usporedba Numeričkog i Analitičkog rješenja za $Wo=10$

Graf 20 profila brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$:



Slika 18. 20 profila u, w brzina, $Wo=10$

Tablični prikaz brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$:

Brzina numerička (rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	-0,0335	0,0214	0,0336	-0,0213
2.	-0,0335	0,0212	0,0337	-0,0211
3.	-0,0338	0,0210	0,0339	-0,0209
4.	-0,0345	0,0210	0,0345	-0,0209
5.	-0,0353	0,0217	0,0354	-0,0216
6.	-0,0357	0,0237	0,0358	-0,0237
7.	-0,0338	0,0271	0,0338	-0,0271
8.	-0,0268	0,0296	0,0268	-0,0296
9.	-0,0133	0,0245	0,0133	-0,0245
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 4.20 $u(rad,tren)$, $Wo=10$

Brzina analitička (rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	-0,0335	0,0213	0,0335	-0,0213
2.	-0,0336	0,0212	0,0336	-0,0212
3.	-0,0339	0,0209	0,0339	-0,0209
4.	-0,0345	0,0209	0,0345	-0,0209
5.	-0,0354	0,0216	0,0354	-0,0216
6.	-0,0358	0,0237	0,0358	-0,0237
7.	-0,0338	0,0271	0,0338	-0,0271
8.	-0,0268	0,0296	0,0268	-0,0296
9.	-0,0133	0,0245	0,0133	-0,0245
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 4.19 $w(rad,tren)$, $Wo=10$

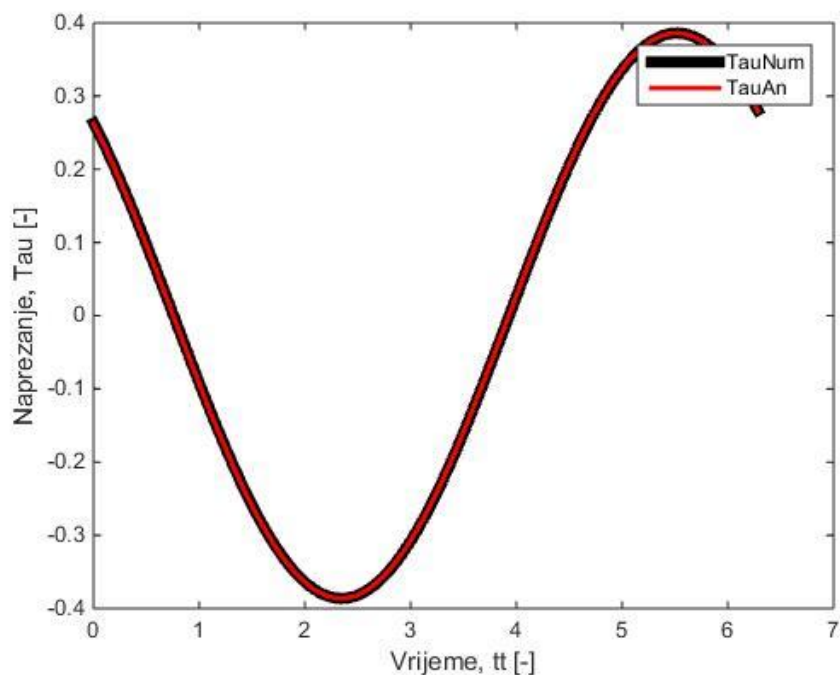
Tablični prikaz razlika brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$:

Razlika brzina(rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	6,73E-05	7,76E-05	4,39E-05	2,39E-05
2.	6,42E-05	7,62E-05	4,24E-05	2,10E-05
3.	5,98E-05	7,42E-05	3,91E-05	1,61E-05
4.	5,55E-05	7,13E-05	3,31E-05	9,57E-06
5.	5,25E-05	6,66E-05	2,36E-05	2,82E-06
6.	5,07E-05	5,78E-05	1,10E-05	-1,50E-06
7.	4,72E-05	4,35E-05	-8,49E-07	-1,23E-06
8.	3,65E-05	2,54E-05	-6,04E-06	2,39E-06
9.	1,67E-05	1,00E-05	-1,90E-06	3,49E-06
10.	0	0	0	0

Tablica 4.21 $u(rad,tren)-w(rad,tren)$, $Wo=10$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se brzine gotovo potpuno poklapaju a minimalna razlika mogla bi se okarakterizirati kao greška u načinu računanja računalnog programa. No brzine su u iznosu manje nego kod početnog slučaja za $Wo=1$.

Graf naprezanja u jednom taktu:



Slika 19. Smično naprezanje, $Wo=10$

Tablični prikaz naprezanja, $TauNum(tren)$ i $TauAn(tren)$: :

Naprezanje numeričko (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,0709	-0,3797	-0,0711	0,3796

Tablica 4.23 $TauNum(tren)$, $Wo=10$

Naprezanje analitičko (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,0698	-0,3798	-0,0698	0,3798

Tablica 4.22 $TauAn(tren)$, $Wo=10$

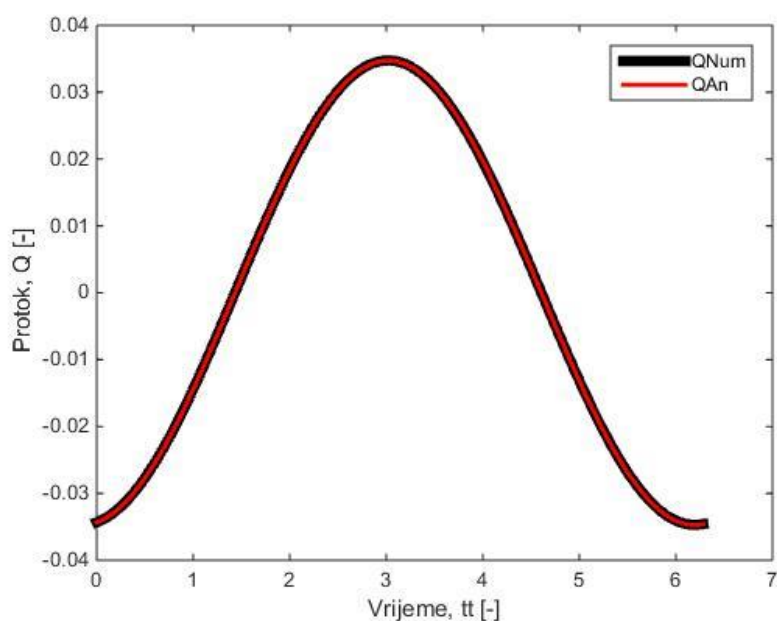
Tablični prikaz razlike naprezanja, $TauNum(tren) - TauAn(tren)$: :

Razlika naprezanja (tren)			
1.	2.	3.	4.
1,1E-03	8,3E-05	-1,2E-03	-2,1E-04

Tablica 4.24 $TauNum(tren)-TauAn(tren)$, $Wo=10$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se naprezanja gotovo potpuno poklapaju a minimalna razlika mogla bi se okarakterizirati kao greška u načinu računanja računalnog programa. No, naprezanja su u iznosu manje nego kod početnog slučaja za $Wo=1$.

Graf protoka u jednom taktu:



Slika 20. Protok, $Wo=10$

Tablični prikaz protoka, $QNum(tren)$ i $QAn(tren)$:

Protok numerički (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,0261	0,0229	0,0262	-0,0228

Tablica 4.26 $QNum(tren)$, $Wo=10$

Protok analitičko (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,0262	0,0228	0,0262	-0,0228

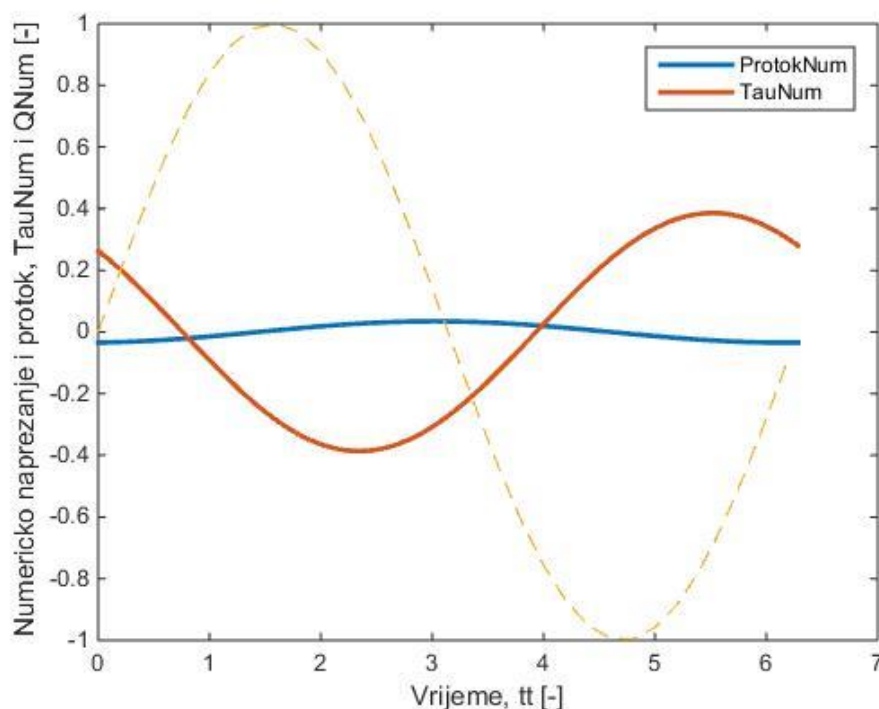
Tablica 4.25 $QAn(tren)$, $Wo=10$

Tablični prikaz razlike protoka, $QNum(tren)$ i $QAn(tren)$:

Razlika protoka (tren)			
1.	2.	3.	4.
4,1E-05	3,4E-05	8,0E-06	1,1E-05

Tablica 4.27 $QNum(tren) - QAn(tren)$., $Wo=10$

Da bi se vidio fazni pomak uslijed povećanja Womerslyjevog broja na istom grafu nacrtane su funkcije numeričkog protoka i naprezanja.

Slika 21. Protok i smično naprezanje, $Wo=10$

4.2. Usporedba rješenja za Cassonov model

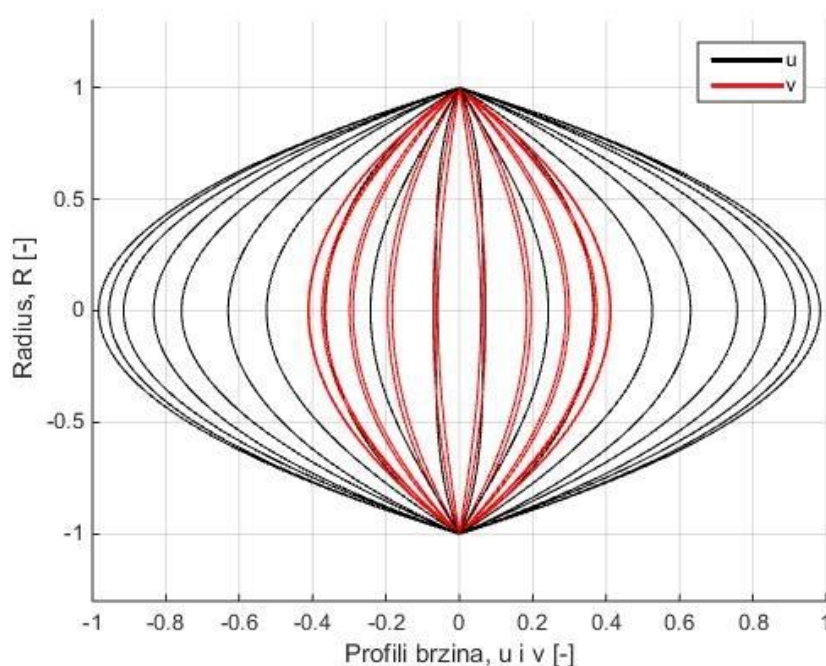
U ovom poglavlju bit će uspoređena rješenja dobivena u Matlabu za model konstantne viskoznosti te Cassonov model viskoznosti. U nastavku će biti prikazani podaci samo za Cassonov model te razliku numeričkog modela i Cassonovog modela. U poglavlju, oznaka „Num“ se sada mijenja u „Newtn“. Brzina dobivena u Cassonovom modelu označena je sa $v(rad, tren)$ te $\tau_c \square TauCass$ i $Q_c \square QCass$

4.2.1. Usporedba rješenja za $Wo=1$, Cassonov omjer=0.3

Kôd programa kojim su dobivena rješenja polja brzina, smičnih napreznja i protoka za slučaj konstantne viskoznosti isti je kao u početnom primjeru. Cassonov omjer više nije 0 nego 0,3, a Womersyjev broj 1. Isto kao i u prethodnom slučaju brzine, smična napreznja i protoci

uzeti su kao funkcija skraćenog polja nazvanog rad i tren. Brzina se kod Cassonovog modela označava s v

Graf 20 profila brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$:



Slika 22. 20 profila brzina

Tablični prikaz brzine $v(rad, tren)$:

Brzina Cassonova(rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	0,1934	0,3648	-0,1934	-0,3648
2.	0,1881	0,3542	-0,1881	-0,3541
3.	0,1790	0,3360	-0,1790	-0,3359
4.	0,1660	0,3102	-0,1660	-0,3101
5.	0,1490	0,2769	-0,1490	-0,2768
6.	0,1279	0,2361	-0,1279	-0,2361
7.	0,1027	0,1879	-0,1027	-0,1879
8.	0,0730	0,1325	-0,0730	-0,1325
9.	0,0389	0,0698	-0,0389	-0,0698
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 4.28 $v(rad,tren)$, $Wo=1$, $OMJER=0.3$

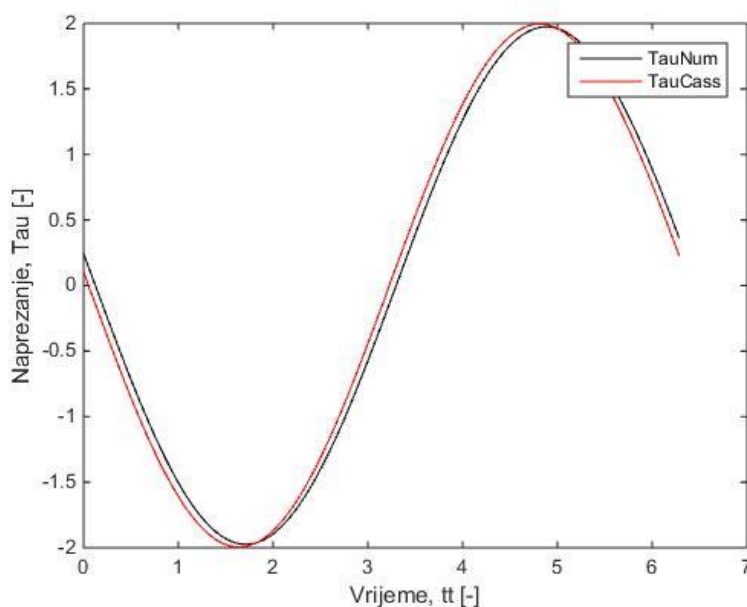
Tablični prikaz razlika brzina $u(\text{rad}, \text{tren})$ i $w(\text{rad}, \text{tren})$

Razlika brzina (rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	1,69E-01	5,42E-01	-1,69E-01	-5,42E-01
2.	1,66E-01	5,26E-01	-1,66E-01	-5,26E-01
3.	1,59E-01	4,99E-01	-1,59E-01	-4,99E-01
4.	1,50E-01	4,60E-01	-1,50E-01	-4,60E-01
5.	1,37E-01	4,10E-01	-1,37E-01	-4,10E-01
6.	1,21E-01	3,49E-01	-1,21E-01	-3,49E-01
7.	9,95E-02	2,77E-01	-9,95E-02	-2,77E-01
8.	7,29E-02	1,95E-01	-7,29E-02	-1,95E-01
9.	4,01E-02	1,02E-01	-4,01E-02	-1,02E-01
10.	0	0	0	0

Tablica 4.29 $u(\text{rad}, \text{tren})$ - $v(\text{rad}, \text{tren})$, $W_0=1$, $OMJER=0.3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se brzine više ne poklapaju. Brzine dobivene korištenjem Cassonovim modelom generalno su manje nego kod modela s konstantnim koeficijentom viskoznosti, što je razumljivo zbog većeg utjecaja trenja na gibanje.

Graf naprezanja u jednom taktu:



Slika 23. Smično naprezanje, $W_0=1$, $OMJER=0.3$

Tablični prikaz Cassonovog naprezanja, $\tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$:

Naprezanje Cassonovo (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,9801	-1,7384	0,9801	1,7382

Tablica 4.30 $\tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$, $W_0=1$, $OMJER=0,3$

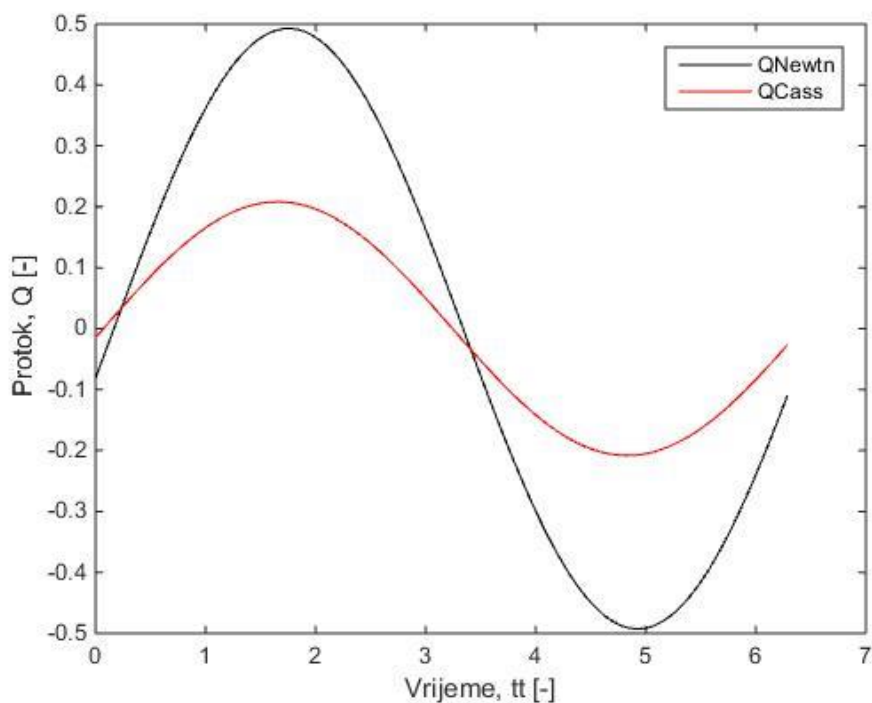
Tablični prikaz razlike naprezanja, $\tau_{\text{Num}}(\text{tren}) - \tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$:

Razlika naprezanja (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,1353	-0,0465	-0,1352	0,0466

Tablica 4.31 $\tau_{\text{Num}}(\text{tren}) - \tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$, $W_0=1$, $OMJER=0,3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se naprezanja također ne poklapaju. Štoviše, naprezanje kod Cassonovog modela ide u kompleksnu domenu.

Graf protoka u jednom taktu:



Slika 24. Protok, $W_0=1$, $OMJER=0.3$

Tablični prikaz Cassonovog protoka, $QCass(tren)$:

Protok Cassonov (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,0991	0,1831	-0,0991	-0,1831

Tablica 4.32 $QCass(tren)$, $Wo=1$, $OMJER=0,3$

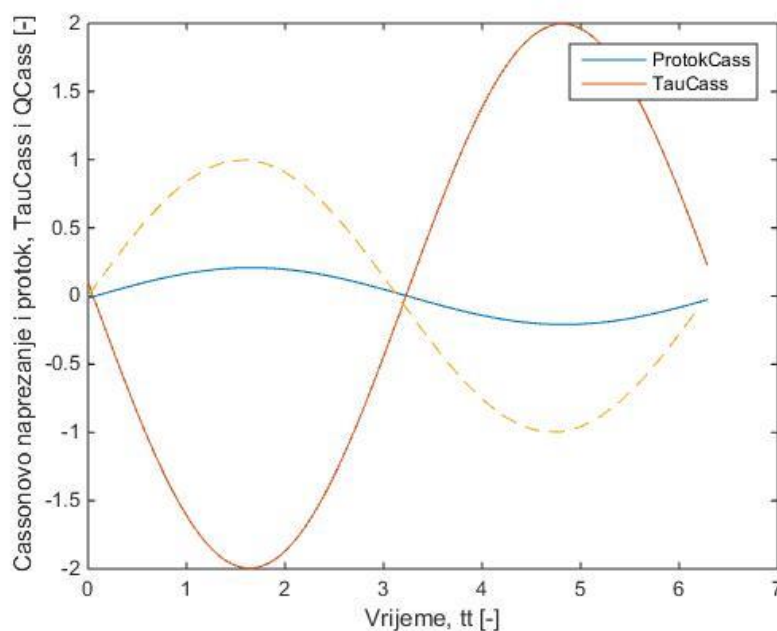
Tablični prikaz razlike protoka, $Qnum(tren)-QCass(tren)$:

Razlika protoka (tren)			
1.	2.	3.	4.
9,3E-02	2,7E-01	-9,3E-02	-2,7E-01

Tablica 4.33 $QNum(tren)-QCass(tren)$, $Wo=1$, $OMJER=0,3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se protoci također razlikuju, što je razumljivo zbog većeg utjecaja trenja na brzinu. Kako su brzina i protok izravno povezano, rješenja jesu fizikalno točna.

Da bi se vidio fazni pomak uslijed Cassonovog broja, na istom grafu nacrtane su funkcije Cassonovog protoka i naprezanja.

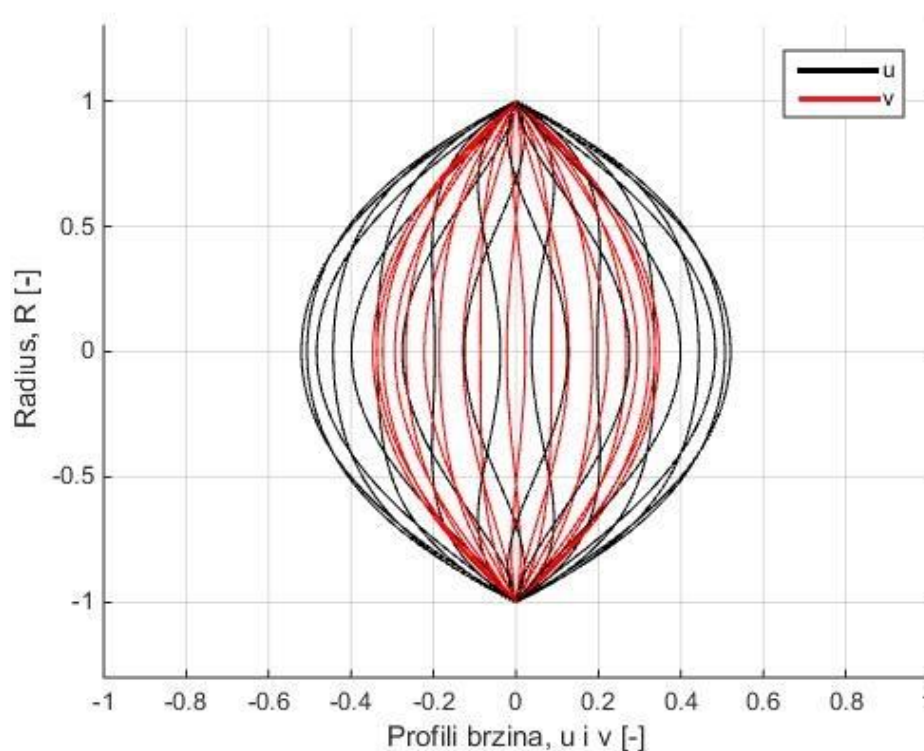


Slika 25. Protok i smično naprezanje, $Wo=1$, $OMJER=0,3$

4.2.2. Usporedba rješenja za $Wo=3$, Cassonov omjer=0.3

Kôd programa kojim su dobivena rješenja polja brzina, smičnih naprezanja i protoka za slučaj konstantne viskoznosti isti je kao u početnom primjeru. Cassonov omjer više nije 0 nego 0,3. a Womersyjev broj 1. Isto kao i u prethodnom slučaju brzine, smična naprezanja i protoci su uzeti kao funkcija skraćenog polja nazvanog rad i tren.

Graf 20 profila brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$:



Slika 26. 20 profila brzina , $Wo=3$, OMJER=3

Tablični prikaz brzine $v(rad, tren)$:

Brzina Cassonova(rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	-0,0215	0,3443	0,0215	-0,3443
2.	-0,0187	0,3348	0,0187	-0,3348
3.	-0,0142	0,3185	0,0142	-0,3185
4.	-0,0084	0,2951	0,0084	-0,2951
5.	-0,0021	0,2646	0,0021	-0,2646
6.	0,0040	0,2267	-0,0040	-0,2267
7.	0,0086	0,1814	-0,0086	-0,1814
8.	0,0106	0,1285	-0,0106	-0,1285
9.	0,0083	0,0680	-0,0083	-0,0680
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 4.34 $v(\text{rad}, \text{tren})$, $Wo=3$, $OMJER=0.3$

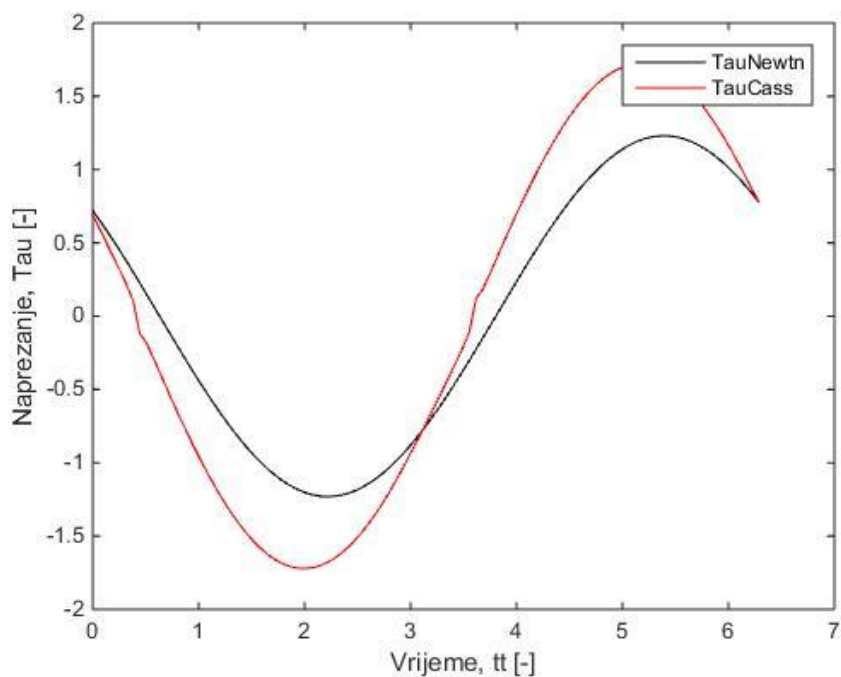
Tablični prikaz razlika brzina $u(\text{rad}, \text{tren})$ i $w(\text{rad}, \text{tren})$

$u(\text{rad}, \text{tren}) - v(\text{rad}, \text{tren})$				
	1.	2.	3.	4.
1.	-2,50E-01	9,71E-02	2,50E-01	-9,71E-02
2.	-2,40E-01	9,99E-02	2,40E-01	-9,99E-02
3.	-2,23E-01	1,04E-01	2,23E-01	-1,04E-01
4.	-1,99E-01	1,07E-01	1,99E-01	-1,07E-01
5.	-1,69E-01	1,09E-01	1,69E-01	-1,09E-01
6.	-1,34E-01	1,06E-01	1,34E-01	-1,06E-01
7.	-9,70E-02	9,60E-02	9,70E-02	-9,60E-02
8.	-5,95E-02	7,66E-02	5,95E-02	-7,66E-02
9.	-2,55E-02	4,52E-02	2,55E-02	-4,52E-02
10.	0	0	0	0

Tablica 4.35 $u(\text{rad}, \text{tren}) - v(\text{rad}, \text{tren})$, $Wo=3$, $OMJER=0.3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se brzine više ne poklapaju. Brzine dobivene korištenjem Cassonovim modelom generalno su manje nego kod modela s konstantnim koeficijentom viskoznosti, što je razumljivo zbog većeg utjecaja trenja na gibanje.

Graf naprezanja u jednom taktu:

Slika 27. Smična naprezanja, $Wo=3$, $OMJER=0,3$

Tablični prikaz Cassonovog naprezanja, $TauCass(tren)$:

Naprezanje Cassonovo (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,2821	-1,6984	0,2821	1,6984

Tablica 4.36 $TauCass(tren)$, $Wo=3$, $OMJER=0,3$

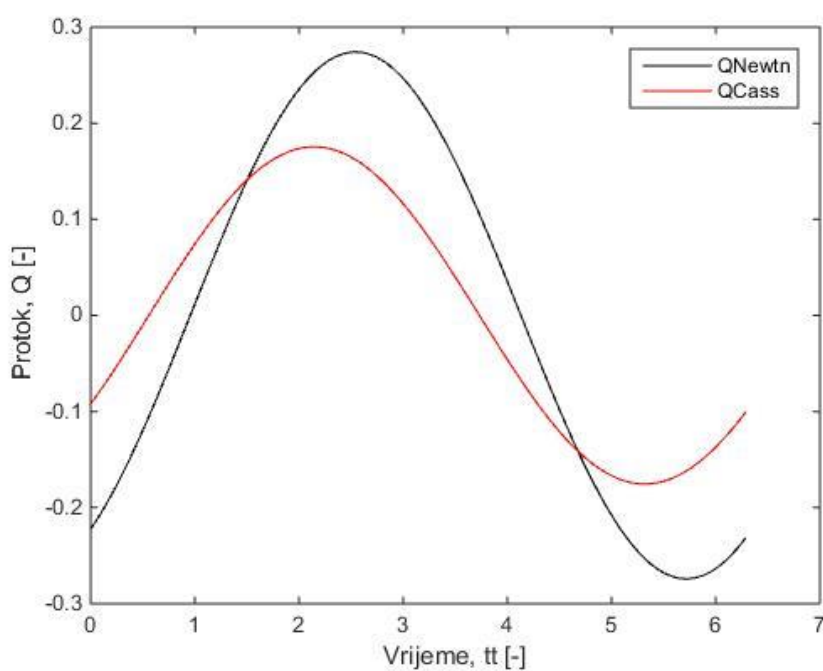
Tablični prikaz razlike naprezanja, $TauNum(tren) - TauCass(tren)$:

Razlika naprezanja (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,3550	0,4699	-0,3550	-0,4698

Tablica 4.37 $TauNum(tren) - TauCass(tren)$, $Wo=3$, $OMJER=0,3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se naprezanja također ne poklapaju. Štoviše, naprezanje kod Cassonovog modela ide u kompleksnu domenu.

Graf protoka u jednom taktu :



Slika 28. Protok, $Wo=3$, $OMJER=0,3$

Tablični prikaz Cassonovog protoka, $QCass(tren)$:

Protok Cassonov (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,0022	0,1755	-0,0022	-0,1755

Tablica 4.38 $TauCass(tren)$, $Wo=3$, $OMJER=0,3$

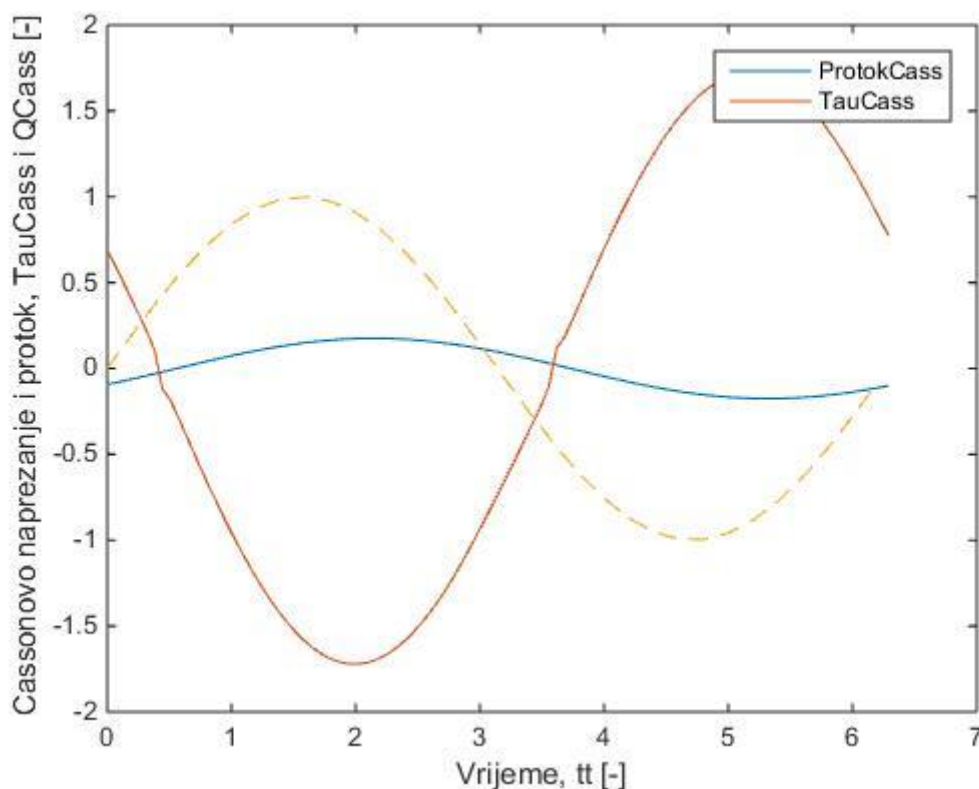
Tablični prikaz razlike protoka, $QNum(tren)-QCass(tren)$:

Razlika protoka (tren)			
1.	2.	3.	4.
-1,0E-01	7,9E-02	1,0E-01	-7,9E-02

Tablica 4.39 $QNum(tren)-QCass(tren)$, $Wo=3$, $OMJER=0,3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se protoci također razlikuju, što je razumljivo zbog većeg utjecaja trenja na brzinu. Kako su brzina i protok izravno povezano, rješenja jesu fizikalno točna.

Da bi se vidio fazni pomak uslijed Cassonovog broja, na istom grafu nacrtane su funkcije Cassonovog protoka i naprezanja.

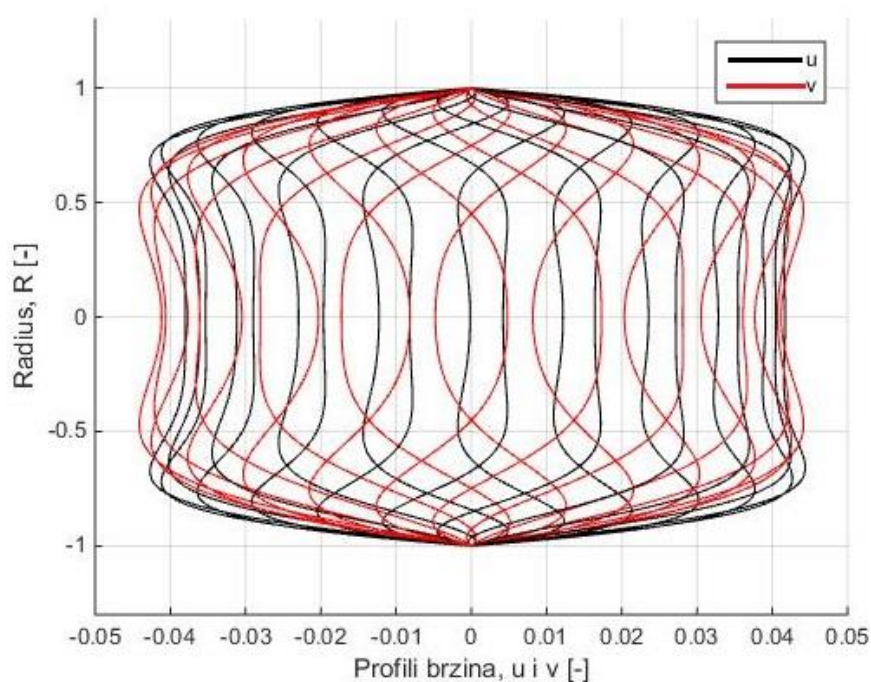


Slika 29. Protok i smično naprezanje, $Wo=3$, $OMJER=0,3$

4.2.3. Usporedba rješenja za $Wo=10$, Cassonov omjer=0.3

Kôd programa kojim su dobivena rješenja polja brzina, smičnih naprezanja i protoka za slučaj konstantne viskoznosti isti je kao u početnom primjeru. Cassonov omjer više nije 0 nego 0,3. a Womersyjev broj 10. Isto kao i u prethodnom slučaju brzine, smična naprezanja i protoci su uzeti kao funkcija skraćenog polja nazvanog rad i tren.

Graf 20 profila brzina $u(\text{rad}, \text{tren})$ i $w(\text{rad}, \text{tren})$ prikazan je na slici:



Slika 30. 20 profila brzina, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

Tablični prikaz brzine $v(\text{rad}, \text{tren})$:

Brzina Cassonova(rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	-0,0362	0,0205	0,0362	-0,0205
2.	-0,0364	0,0213	0,0365	-0,0212
3.	-0,0366	0,0226	0,0367	-0,0226
4.	-0,0363	0,0246	0,0363	-0,0246
5.	-0,0348	0,0270	0,0348	-0,0270
6.	-0,0315	0,0294	0,0315	-0,0293
7.	-0,0256	0,0303	0,0256	-0,0303
8.	-0,0170	0,0278	0,0171	-0,0278
9.	-0,0073	0,0187	0,0073	-0,0187
10.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 4.40 $v(\text{rad}, \text{tren})$, $Wo=10$, $OMJER=0.3$

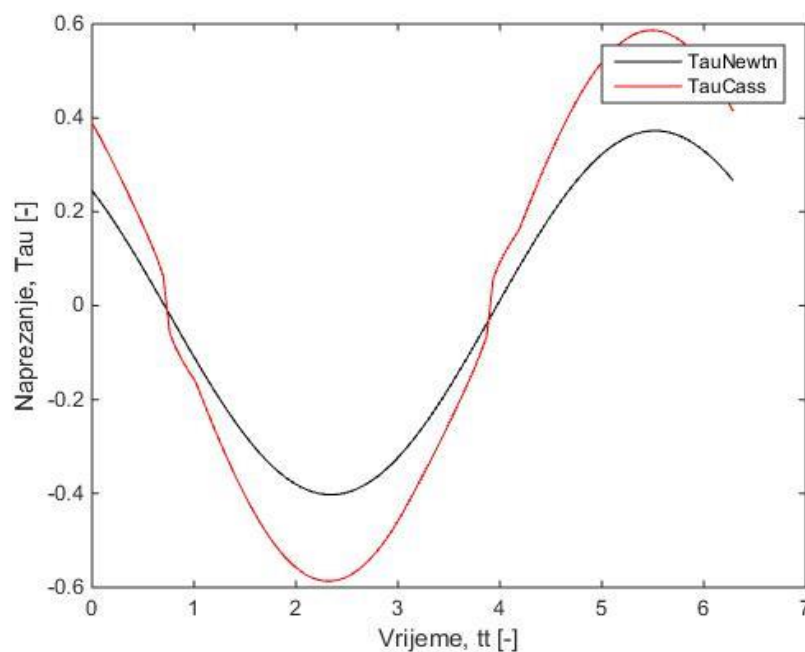
Tablični prikaz razlika brzina $u(rad, tren)$ i $w(rad, tren)$

Razlika brzina(rad,tren)				
	1.	2.	3.	4.
1.	4,98E-03	2,92E-03	-7,75E-04	9,20E-04
2.	5,05E-03	1,93E-03	-1,02E-03	1,75E-03
3.	4,79E-03	2,33E-04	-1,05E-03	3,19E-03
4.	3,63E-03	-1,94E-03	-2,82E-04	5,01E-03
5.	1,04E-03	-3,93E-03	1,83E-03	6,55E-03
6.	-3,00E-03	-4,50E-03	5,34E-03	6,63E-03
7.	-7,29E-03	-2,34E-03	9,05E-03	3,94E-03
8.	-9,10E-03	2,45E-03	1,03E-02	-1,40E-03
9.	-5,75E-03	6,08E-03	6,31E-03	-5,57E-03
10.	0	0	0	0

Tablica 4.41 $u(rad,tren)-v(rad,tren)$, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se brzine više ne poklapaju. Brzine dobivene korištenjem Cassonovim modelom generalno su manje nego kod modela s konstantnim koeficijentom viskoznosti, što je razumljivo zbog većeg utjecaja trenja na gibanje.

Graf naprezanja u jednom taktu:



Slika 31. Smična naprezanja, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

Tablični prikaz Cassonovog naprezanja, $\tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$:

Naprezanje Cassonovo (tren)			
1.	2.	3.	4.
0,1360	-0,5793	-0,1362	0,5791

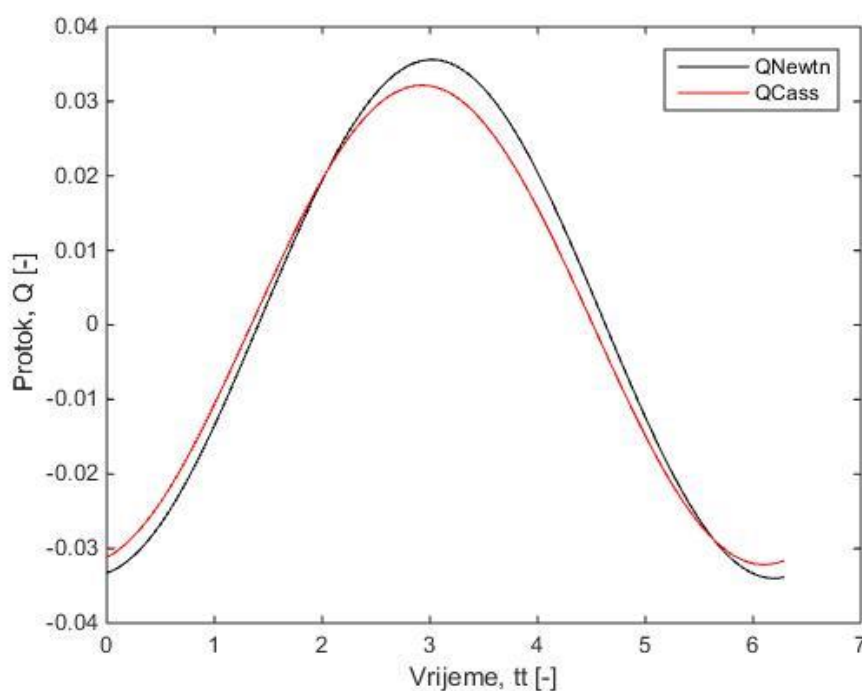
Tablica 4.42 $\tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

Tablični prikaz razlike naprezanja, $\tau_{\text{Num}}(\text{tren}) - \tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$:

Razlika naprezanja (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,0831	0,1832	0,0501	-0,2132

Tablica 4.43 $\tau_{\text{Num}}(\text{tren}) - \tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

Graf protoka u jednom taktu:



Slika 32. Protok, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

Tablični prikaz Cassonovog protoka, $Q_{\text{Cass}}(\text{tren})$:

Protok Cassonov (tren)			
1.	2.	3.	4.
-0,0222	0,0233	0,0222	-0,0233

Tablica 4.44 $\tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

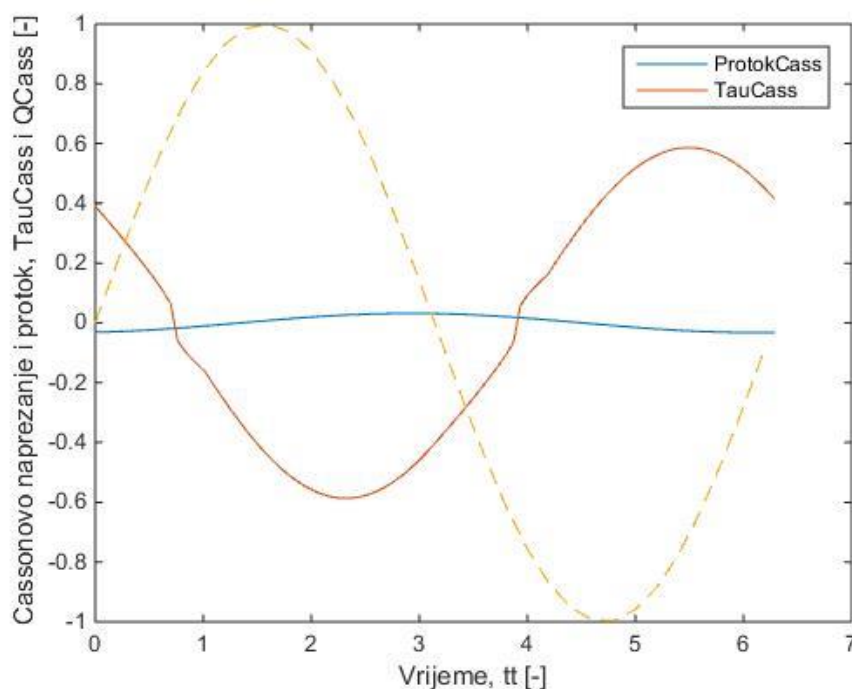
Tablični prikaz razlike protoka, $Q_{\text{Num}}(\text{tren}) - Q_{\text{Cass}}(\text{tren})$:

Razlika protoka (tren)			
1.	2.	3.	4.
-3,0E-03	4,6E-04	4,8E-03	1,2E-03

Tablica 4.45 $\tau_{\text{Num}}(\text{tren}) - \tau_{\text{Cass}}(\text{tren})$, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

Iz prikazanih tabličnih podataka vidi se da se protoci također razlikuju, što je razumljivo zbog većeg utjecaja trenja na brzinu. Kako su brzina i protok izravno povezano, rješenja jesu fizikalno točna.

Da bi se vidio fazni pomak uslijed Cassonovog broja, na istom grafu nacrtane su funkcije Cassonovog protoka i naprezanja.

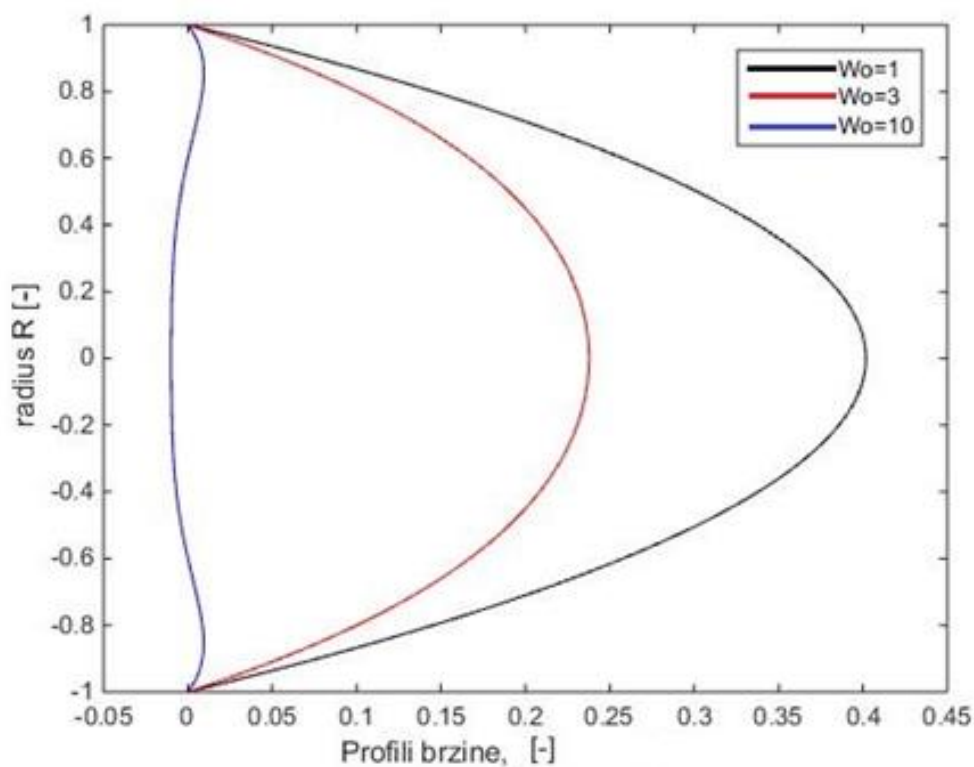


Slika 33. Protok i Smično naprezanje, $Wo=10$, $OMJER=0,3$

5. ANALIZA

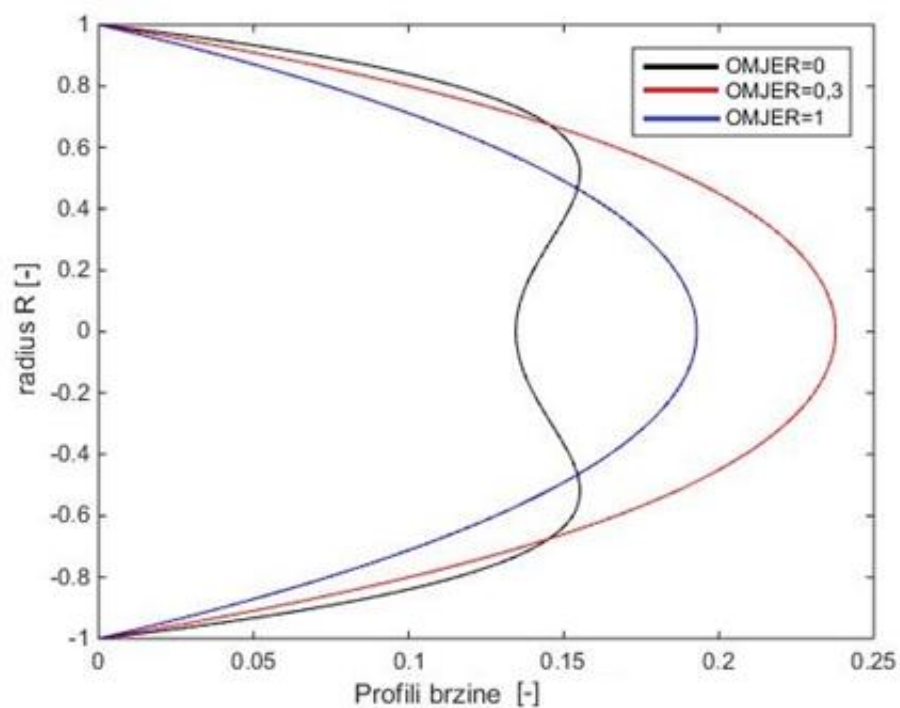
Iz rezultata prikazanim u prošlom poglavlju može se zaključiti da se u Cassonovom modelu porastom Womerslyjevog broja i OMJERA mijenja brzina, a s njom i protok te smično naprezanje. Ovdje je prikazana promjena bezdimenzijske brzine, protoka te smičnog naprezanja po OMJERIMA i po Womerslyjevim brojevima. Također su rezultati prikazani u tablici izraženi kao maksimalni protoci i smično naprezanje u vremenu po vremenu u jednom taktu.

Ako se uzme jedan profil brzine u nekom trenutku (npr. $tt = 1,45/2\pi$), utjecaj Womerslyjevih brojeva je vidljiv na slici:



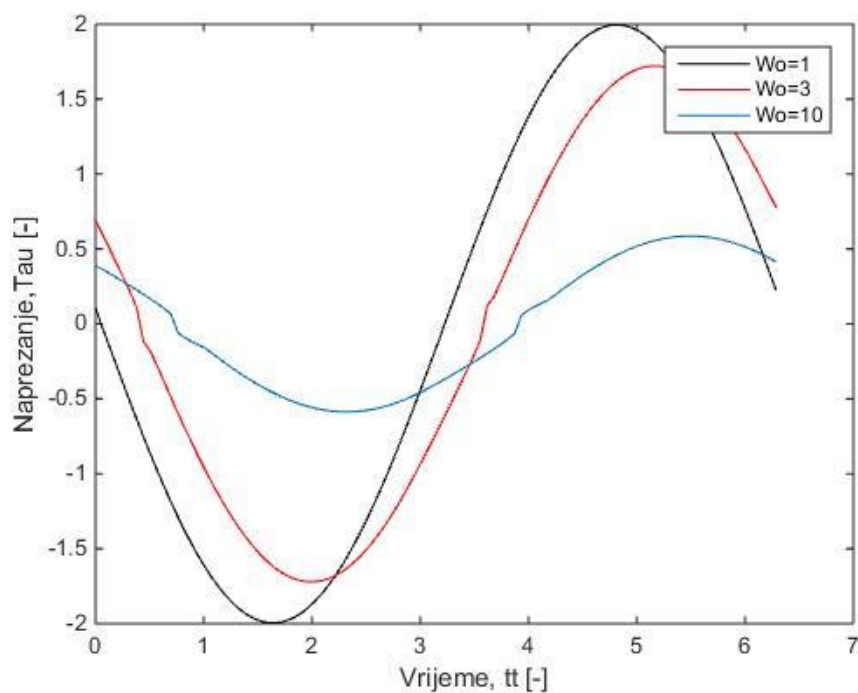
Slika 34. Ovisnost brzine o Wo , za $OMJER=0,3$ u tt

A utjecaj OMJER-a:

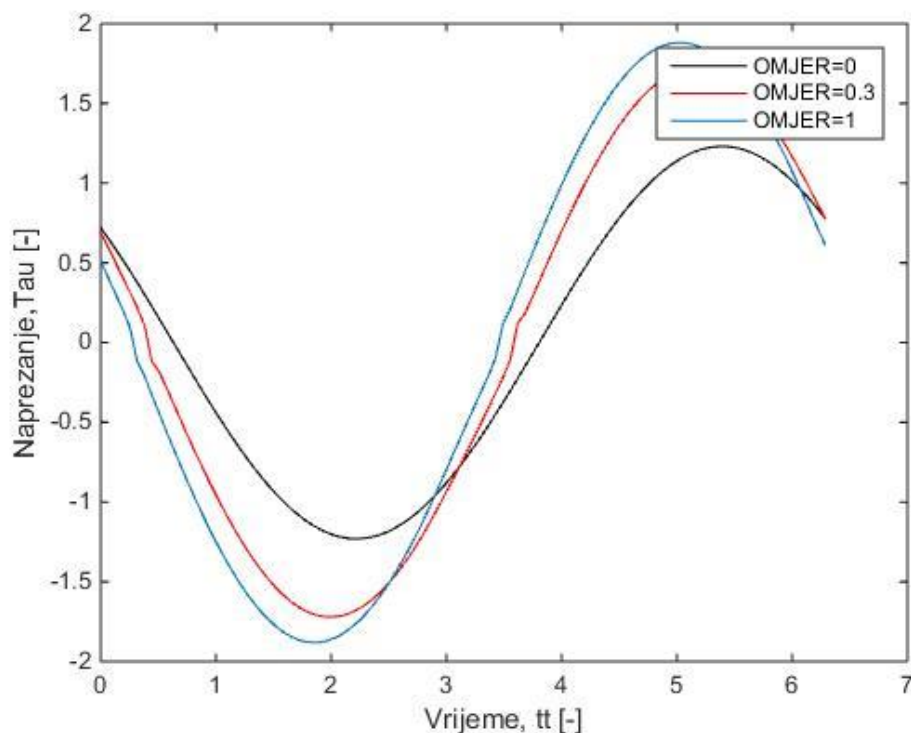


Slika 35. Ovisnost brzine o OMJER-u, za $Wo=3$

Na sljedećim grafovima je prikazana promjena naprezanja po vremenu ovisno o promjeni Womerslyjevih brojeva i OMJERA.



Slika 36. Ovisnost naprezanja o Wo , za $OMJER=0,3$

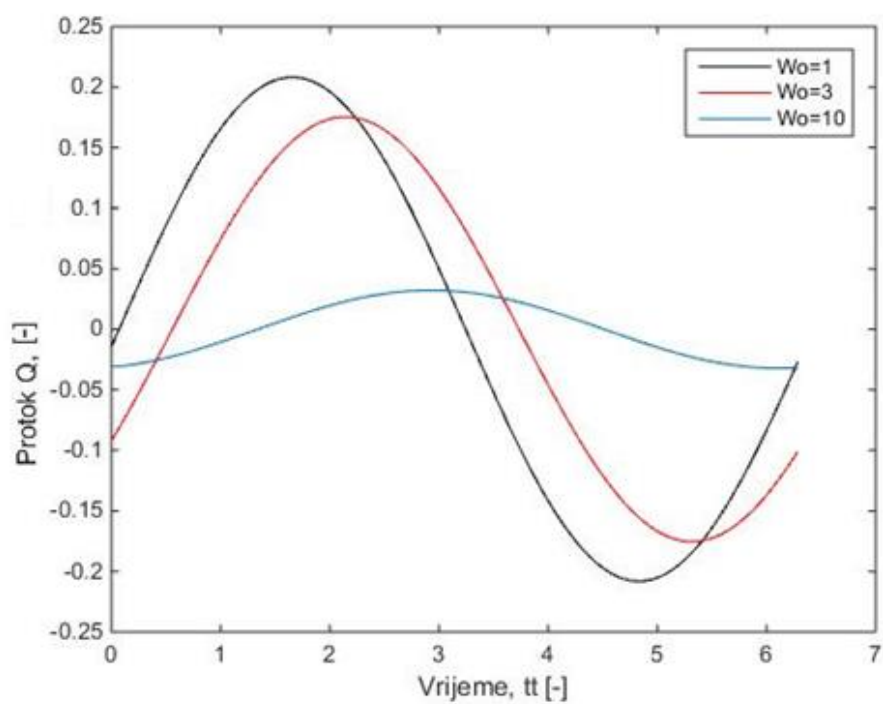
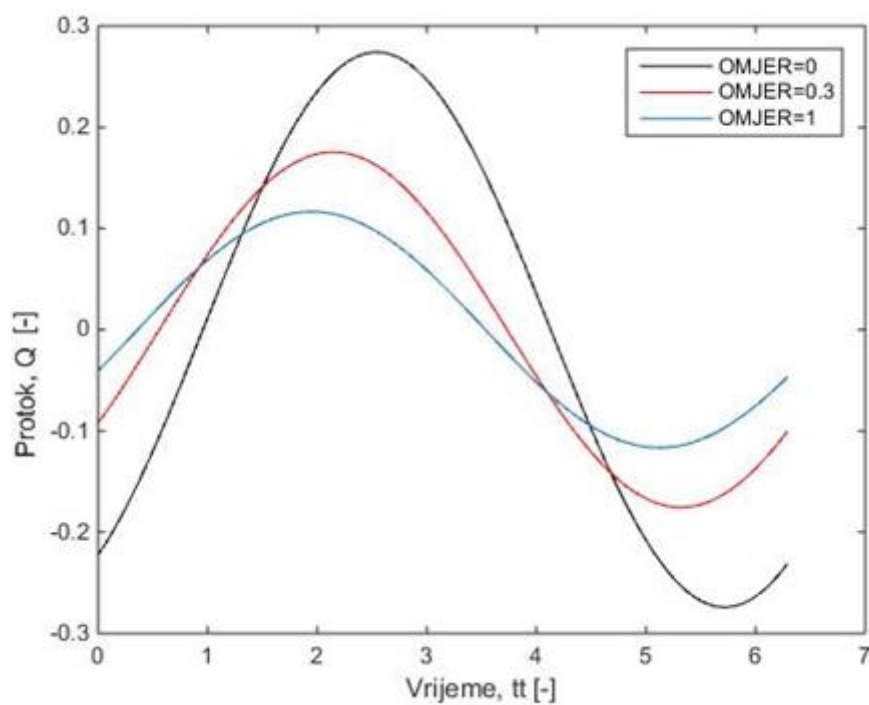
Slika 37. Ovisnost naprezanja o OMJER-u, za $Wo=3$

Tablični prikaz promjene apsolutnog maksimalnog iznosa naprezanja ovisno o vrijednostima Womerslyjevih brojeva i OMJERA.

Maksimalno naprezanje, τ_{Cass}			
	OMJER=0	OMJER=0,3	OMJER=1
Wo=1	-1,9747	-1,996	-1,9975
Wo=3	-1,2307	-1,7212	-1,8817
Wo=10	-0,4026	-0,5865	-0,7459

Tablica 5.1. Maksimalno naprezanje

Na sljedećim grafovima prikazana je promjena protoka po vremenu ovisno o promjeni Womerslyjevih brojeva i OMJERA:

Slika 38. Ovisnost protoka o Wo , za $OMJER=0,3$ Slika 39. Ovisnost protoka o $OMJER$ -u, za $Wo=0,3$

Tablični prikaz promjene maksimalnog iznosa protoka ovisno o vrijednostima Womerslyjevih brojeva i OMJERA. Također se primjećuje da je veći utjecaj Womerslyjeva broja nego OMJERA.

Maksimalni bezdimenzijski protok, $\max(Q_{Cass})$			
	OMJER=0	OMJER=0,3	OMJER=1
Wo=1	0,4926	0,2082	0,1248
Wo=3	0,2742	0,1755	0,1166
Wo=10	0,0401	0,0322	0,0302

Tablica 5.2 Maksimalni protok

Iz prikazanih slika i tablice jasno je vidljivo da povećanjem Womerslyjevog broja kao i OMJERA protok opada.

Također se može primijetiti da se povećanjem Womerslyjevog broja fazni kut povećava, a povećanjem OMJERA fazni kut se smanjuje.

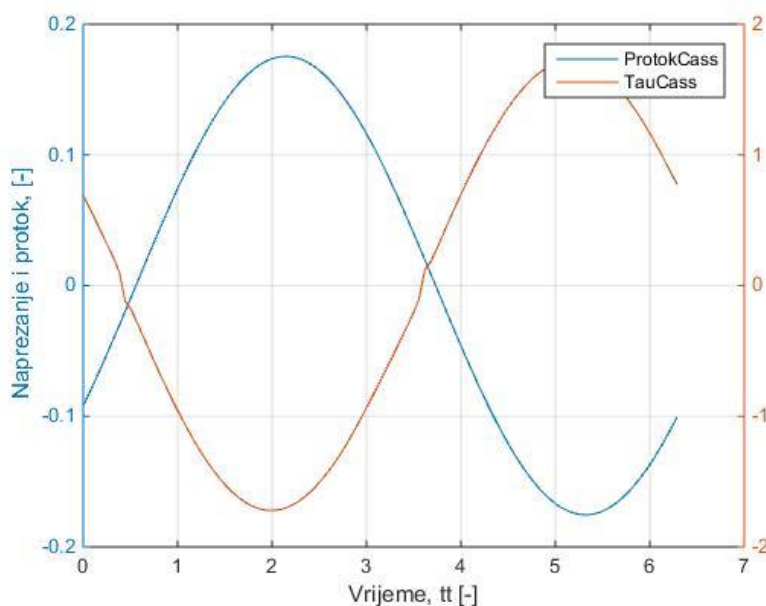
Promjena faznog kuta, odnosno bezdimenzijskog vremena tt prikazana je u tablici:

Tablični prikaz faznog pomaka uslijed djelovanja Womerslyjevog broja i OMJERA.

Fazni pomak za naprezanje, $tt(\tau_{Cass})$, [rad]			
	OMJER=0	OMJER=0,3	OMJER=1
Wo=1	1,759	1,696	1,634
Wo=3	2,262	2,011	1,885
Wo=10	2,388	2,388	2,325

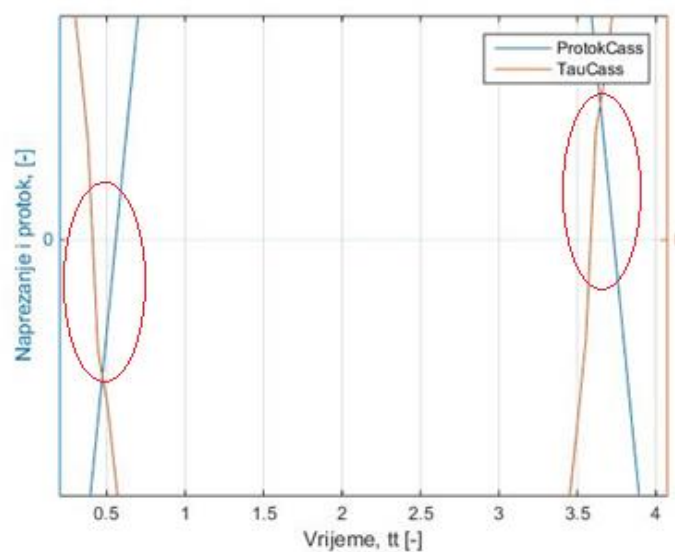
Tablica 5.3 Fazni pomak između naprezanja i $\frac{dp}{dz}$

Prikaz promjene naprezanja i protoka te odnos s faznim kutem vidljiv je na slikama:



Slika 40. Promjena naprezanja i protoka za $Wo=3$, $OMJER=0,3$

Što se uvećano bolje vidi:



Slika 41. Detalj dijagrama, slika 40.

Potrebno je primijetiti da postoje 2 manja područja u kojem su i smično naprezanje i protok istog predznaka. To je pojava do koje dolazi zbog utjecaja OMJERA, odnosno Cassonovog modela trenja te se kao posljedica događa spomenuti fazni pomak. U prvom intervalu naprezanje „kasni“ a u drugom „rani“.

6. ZAKLJUČAK

U prikazanim primjerima može se zaključiti da se analitičko i numeričko rješenje gotovo u potpunosti poklapaju za slučaj Newtonskog modela viskoznosti. Minimalne razlike mogu se objasniti drugačijim načinom računanja programa. Porastom Womerslyjevog broja, apsolutne vrijednosti brzine, protoka i smičnog naprezanja opadaju. Kako je Womerslyjev broj omjer inercijskih i viskoznih sila, to je na prvi pogled nelogično jer je Womerslyjev broj obrnuto proporcionalan s trenjem. Međutim, Womerslyjev broj je također i funkcija gustoće, radijusa i kutne brzine pa je sve fizikalno točno. Može se opravdano zaključiti da se kod malih Womerslyjevih brojeva smično naprezanje neće intenzivno promijeniti te da je velik utjecaj viskoznih sila. U tom je slučaju pogonska sila odnosno gradijent tlaka velikim dijelom u ravnoteži s viskoznim silama. Obrnuto, za slučaj velikih Womerslyjevih brojeva pogonska sila je u ravnoteži s inercijskim silama. Kada se uvede OMJER u model, jasan je dodatni utjecaj trenja. Porastom OMJERA vrijednosti brzina i protoka opadaju a apsolutne vrijednosti smičnog naprezanja rastu. OMJER je direktno vezan s trenjem pa tu ne postoje nedoumice. Utjecaj OMJER-a veći je kod velikih Womerslyjevih brojeva. Također se s porastom Womerslyjevog broja primjećuje porast vrijednosti kuta faznog pomaka i smičnog naprezanja dok se s porastom OMJERA pomak fazni kuta diskretno smanjuje.

LITERATURA

- [1] Edward B. Magram: Engineers Guide to MATLAB, 2011.
- [2] Korade, I. Virag, Z. Korbar, R. : Analiza pulsirajućeg strujanja u cijevi. Zbornik radova, 5. susreti Hrvatskog društva za mehaniku, Donja Stubica, 6.-7. lipanj 2013.

PRILOZI

I. CD-R disc

Kôd u Matlabu:

Prikaz kompletnog koda iz Matlaba pomoću kojeg je riješen zadatak:

Glavni program:

```
clear all
clc
global Wo OMJER

% velicine koje se variraju *****
Wo = 1;           % Womersleyev broj
OMJER = 0;        % omjer  $\tau_0 / (m \cdot du/dr)_{\max}$  (ako je OMJER=0 onda je Newtonski
fluid)
%*****

R = 1;            % bezdimenzijski radijus,
nr = 100;         % broj podjela po radijusa
r = linspace(0, R, nr);
nt = 100;         % broj podjela po vremenu unutar jednog
takta
ntakt=5;          % broj taktova za integraciju (da se
izgubi utjecaj pocetnih uvjeta)
t = linspace(0, ntakt*2*pi, nt*ntakt+1); % bezdimenzijski vremenski trenutki
(tj. kutevi) za citavo vrijeme integracije
tprag=(ntakt-1)*2*pi; % pocetak zadnjeg takta
iloc=0;           % brojac vremenskih trenutaka za  $\tau_w$ 

usvi = pdepe(1,@Pulse, @PulseIC, @PulseBC, r, t); % rjesenje za brzinu
kroz svih ntakt taktova
u(1:nt+1,1:nr)=usvi( nt*(ntakt-1)+1:nt*ntakt+1,1:nr); % rjesenje iz zadnjeg
takta
deltar= r(2)-r(1); %razlika između dva radijusa
dudr(1)=0;
for vrem_tren=1:nt;
    dudr(vrem_tren,1)=0;
```

```

    dudr(vrem_tren,nr)=[u(vrem_tren,nr-2) - 4*u(vrem_tren,nr-1)]/(2*deltar);
%definiranje derivacije brzine po radijusu
    for i=2:nr-1
        dudr(vrem_tren,i)=(u(vrem_tren,i+1)-u(vrem_tren,i-1))/(2*deltar);
    end
end
    for vrem_tren = 1:n
        tau0=OMJER*max(abs(dudr(vrem_tren,:))); % samo kod cassona

        TauNum(vrem_tren)=sign(dudr(vrem_tren,nr)).*tau0 + dudr(vrem_tren,nr) +
        2*sign(dudr(vrem_tren,nr)).*sqrt(tau0*dudr(vrem_tren,nr));
        %smicno naprezanje na stijenci

        ProtokNum(vrem_tren)=2*sum( u(vrem_tren,:).*r )*deltar ; % protok

    end
tt=linspace(0,2*pi,nt); % vrijednost bezdimenzijskog vremena za jedan takt
%GRAFOVI
figure(1)
plot( tt,TauNum,'-k')
xlabel('vrijeme, tt [-]') % crta naprezanje na stijenci
za jedan takt
ylabel('Naprezanje numericki, TauNum [-] ')

figure(2)
hold on
for ijd = 1:20
    plot(u(ijd*5,:), r , '-k')
    plot(u(ijd*5,:), -r , '-k')
    plot([(ijd*5-1), (ijd*5-1)], [-1,1], ':k') % crta 20 profila brzina za
    jedan takt
end
xlabel('Profili 20 brzina, u [-]')
ylabel('Radius, R [-]')
grid on
axis([-1, 1, -1.3, 1.3])
figure(3)
plot( tt,ProtokNum,'-k')
xlabel('vrijeme, tt [-]') % crta protok za jedan takt
ylabel('Protok numericki QNum [-]')
%PODACI
tren = [10,35,60,85];
rad = [10,20,30,40,50,60,70,80,90,100]; % proizvoljno odabrane tocke
u_t=u(tren,rad);

```

```

u_tablica=[1:10]', u_t'];
ProtokNum_tablica=ProtokNum(tren);           %podaci korišteni za
uspoređivanje
TauNum_tablica=TauNum(tren);

```

Podfunkcije potrebne za rješavanje :

Pulse:

```

function [c, f, s] = Pulse(r, t, u, DuDr)
global Wo OMJER

c=Wo^2/4;           % koeficijent uz nestacionarni član (u bezdimenzijskoj jednadzbi je
jedinica)
%smicno naprezanje - za tau0=0  Newtonov zakon viskoznosti
%                        za tau0>0  Cassonov model
tau0=OMJER*max(abs(DuDr));
for i=1:length(DuDr)
    f(i,1)=1/4*(sign(DuDr(i))*tau0 +DuDr(i)+2*sign(DuDr(i))*sqrt(abs(DuDr(i))*tau0) );
% smicno naprezanje
end
s = sin(t);

```

PulseBc:

```

function [pl, ql, pr, qr] = PulseBC(rl, ul, rr, ur, t)
% rubni uvjet u simetrali (du/dr=0)
pl = 0;
ql = 1;
% rubni uvjet na stijenvi cijevi (u=0)
pr = ur;
qr = 0;

```

PulseIC:

```

function u0 = PulseIC(r)
u0 = 0;           % pocetna brzina

```

Analitički način rješavanja:

```

clear all
clc
Wo=1; %definiranje Womerslyjevog broja
nt=100;
R=0.03; % polumjer cijevi
ro=1050; % gustoca krvi
mi=0.004; % viskoznost krvi
T=1; % period
ni=mi/ro; % kinematska viskoznost krvi
omega=2*pi/T; % kruzna frekvencija gradijenta tlaka dp/dt=S*sin(omega*t)
S=-10; % sinusna komponenta tlaka
C=0; % kosinusna komponenta tlaka
P=S+1i*C; % fazor gradijenta tlaka
Pabs=abs(P); % apsolutna vrijednost fazora gradijenta tlaka
coef=4*P/Pabs/(Wo^2); % coef kao koeficijent
J0=besselj(0,Wo*exp(1i*3*pi/4));

Nt=100; % broj podjela po vremenu
t=linspace(0,T,Nt+1);
Nr=100; % broj podjela po vremenu
y=linspace(0,1,Nr);
w(1:Nt,1:Nr)=0; % inicijalizacija polja bezdimenzijske brzine
for i=1:1:Nt
    fact=exp(1i*omega*t(i));
    for j=1:1:Nr
        Jy=besselj(0,Wo*y(j)*exp(1i*3*pi/4));
        w(i,j)=real(coef*(1-Jy/J0)*fact);
    end
    ProtokAn(i)=real(8i*P/Pabs/(Wo^4)*fact*(-Wo^2*1i/2-
Wo*exp(1i*3*pi/4)*besselj(1,Wo*exp(1i*3*pi/4))/J0));
    TauAn(i)=real(4*exp(1i*3*pi/4)*P/Pabs/Wo*fact*besselj(1,Wo*exp(1i*3*pi/4))/J0);
end
%GRAFOVI ANALITICKI
tt=linspace(0,2*pi,nt);

figure(1)
plot(tt,TauAn)
xlabel('vrijeme, tt [-]')
ylabel('Naprezanje analiticki, TauAn [-]')

figure(2)
hold on

```

```
for ijd = 1:20 % samo zbog pomocnih crta, pomaknute svaka za 1 takt
    plot(w(ijd*5,:), y , 'b')
    plot(w(ijd*5,:), -y , 'b')
    plot([(ijd*5-1), (ijd*5-1)], [-1,1], ':k')
end

xlabel('profili 20 brzina, w [-]')
ylabel('Radius R')
grid on
axis([-1, 1, -1.3, 1.3])

figure(3)
    plot( tt,ProtokAn)
xlabel('vrijeme, tt')
ylabel('Protok analiticki, QAn [-]')

%PODACI
tren = [10,35,60,85];
rad = [10,20,30,40,50,60,70,80,90,100]; % proizvoljno odabrane tocke

w_t=w(tren,rad);

w_tablica=[1:10]', w_t'];
ProtokAn_tablica=ProtokAn(tren);
TauAn_tablica=TauAn(tren);
```